

# *Notions de base*

## *pour la métrologie ultrabrève*

*Charles Bourassin-Bouchet,  
Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique*

*Qu'appelle-t-on "impulsion ultrabrève"  
et comment la représenter?*

## ***Objectifs de ce cours :***

***- définir les grandeurs physiques pertinentes***

*(le langage commun de la communauté ultrabrève)*

***- donner les différentes représentations analytiques d'une impulsion***

*(chaque nouvelle représentation donne lieu à de nouvelles techniques de mesures)*

# Champ électromagnétique ultrabref

Equation de Maxwell dans le vide:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

Solution:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i\varphi_0} \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

*l'onde plane monochromatique*

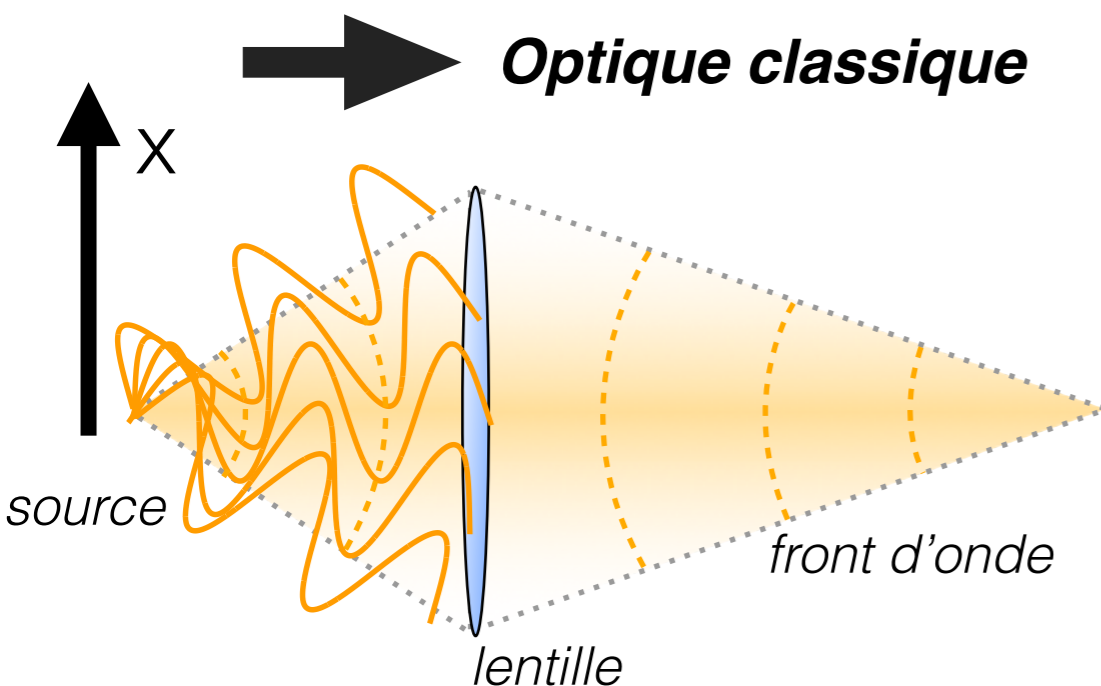
OU

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i\varphi_0(\mathbf{k})} \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} d\mathbf{k}$$

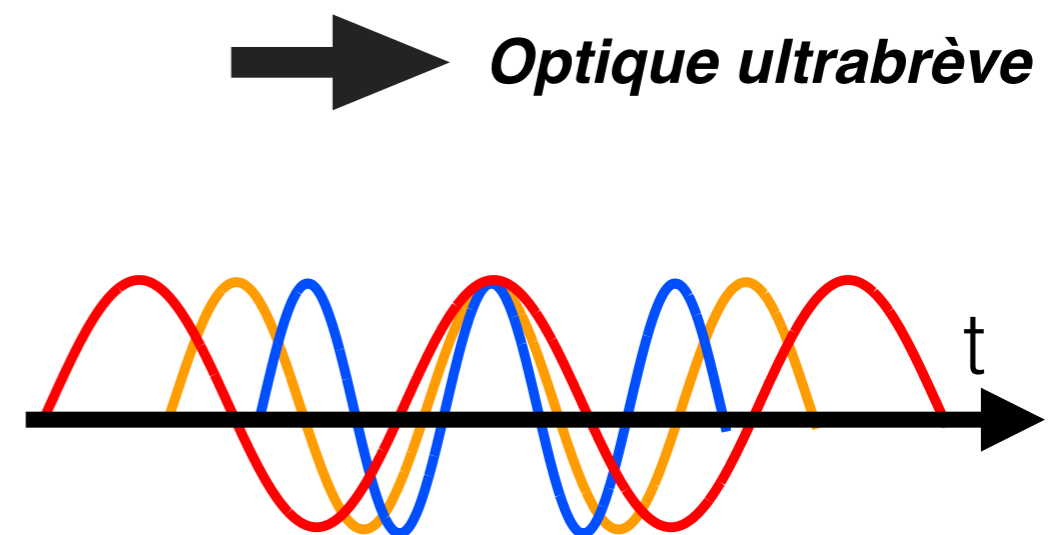
*une combinaison linéaire d'ondes planes monochromatiques*

## 2 cas particuliers :

- Evolution spatiale d'un faisceau monochromatique (infini dans le temps)



- Evolution temporelle d'un faisceau polychromatique (fini dans le temps)



# Plan du cours

---

**Partie I** *L'impulsion  $E(t)$*

**Partie II** *Représentations temps-fréquence*

**Partie III** *L'impulsion  $E(x,y,z,t)$*

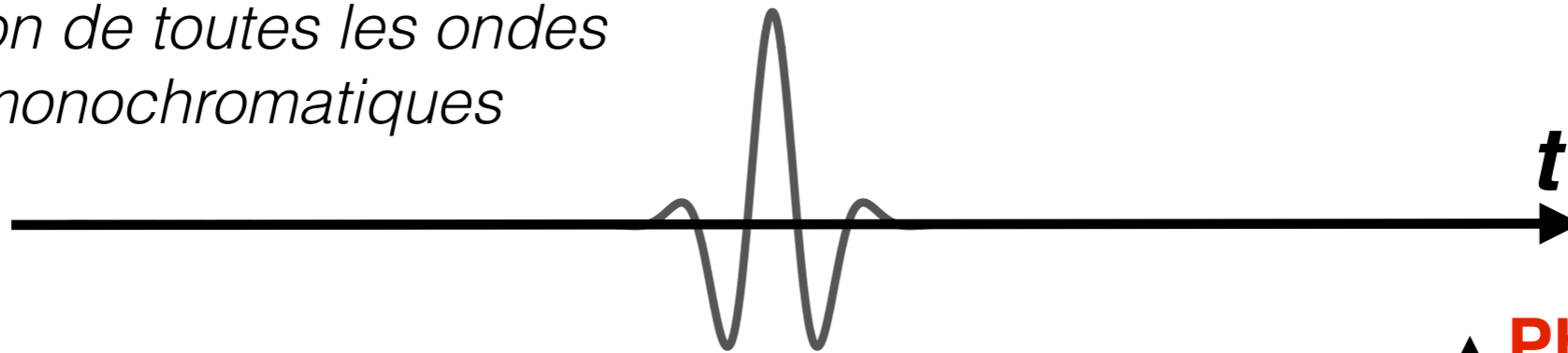
**Partie IV** *Ensembles statistiques d'impulsions*



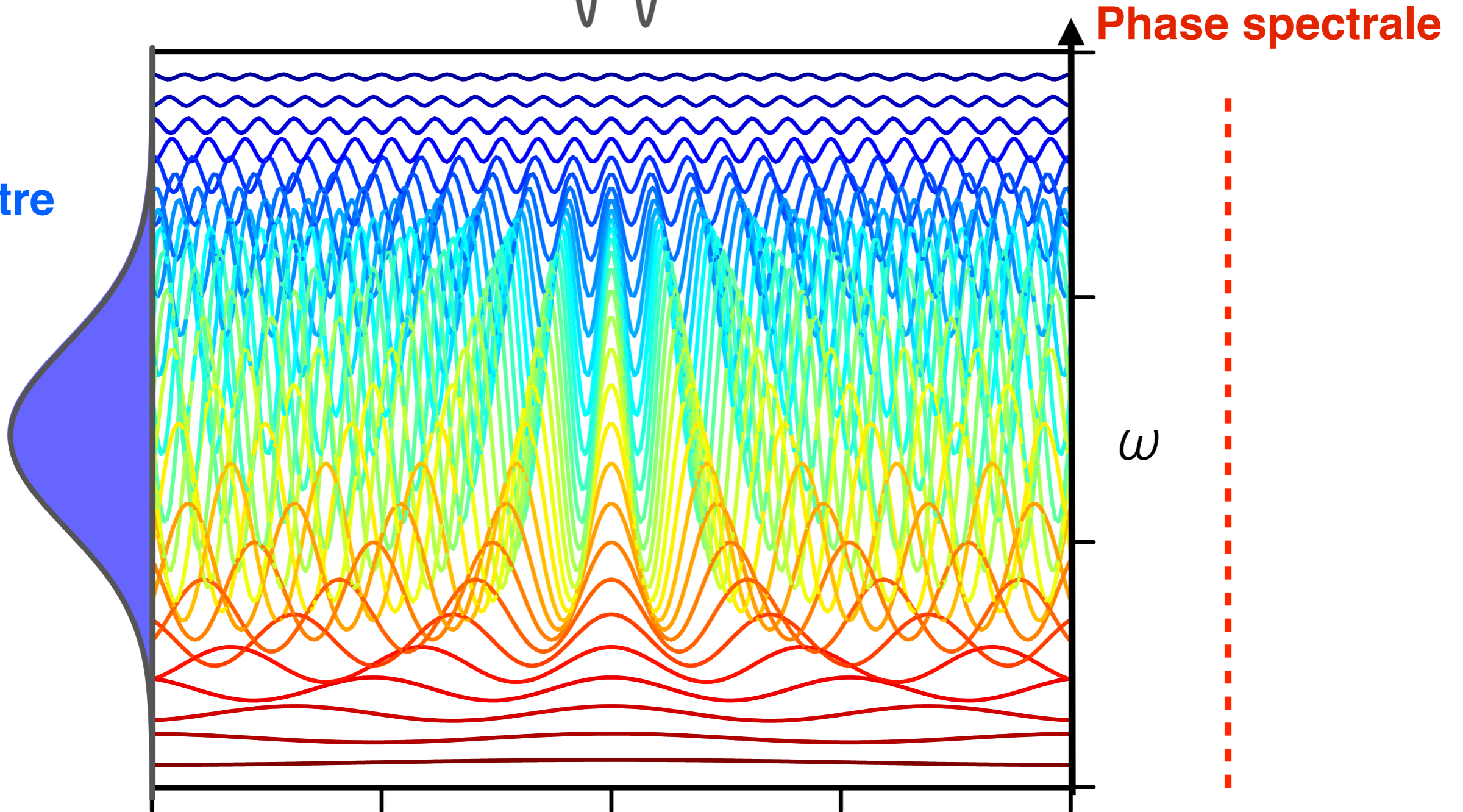
***Partie I***  
*L'impulsion  $E(t)$*

# Spectre et Phase spectrale

*Superposition de toutes les ondes planes monochromatiques*

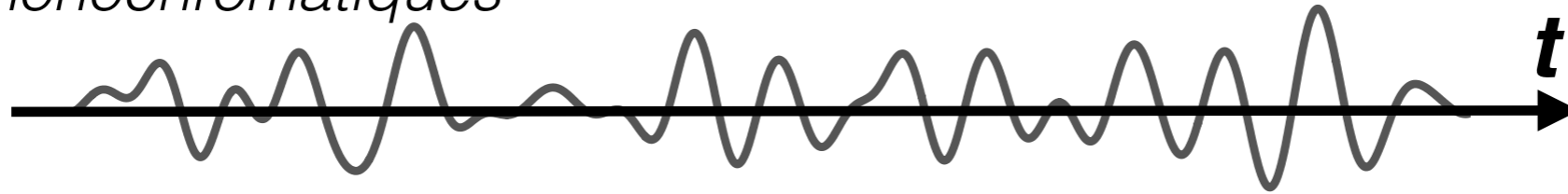


**Spectre**

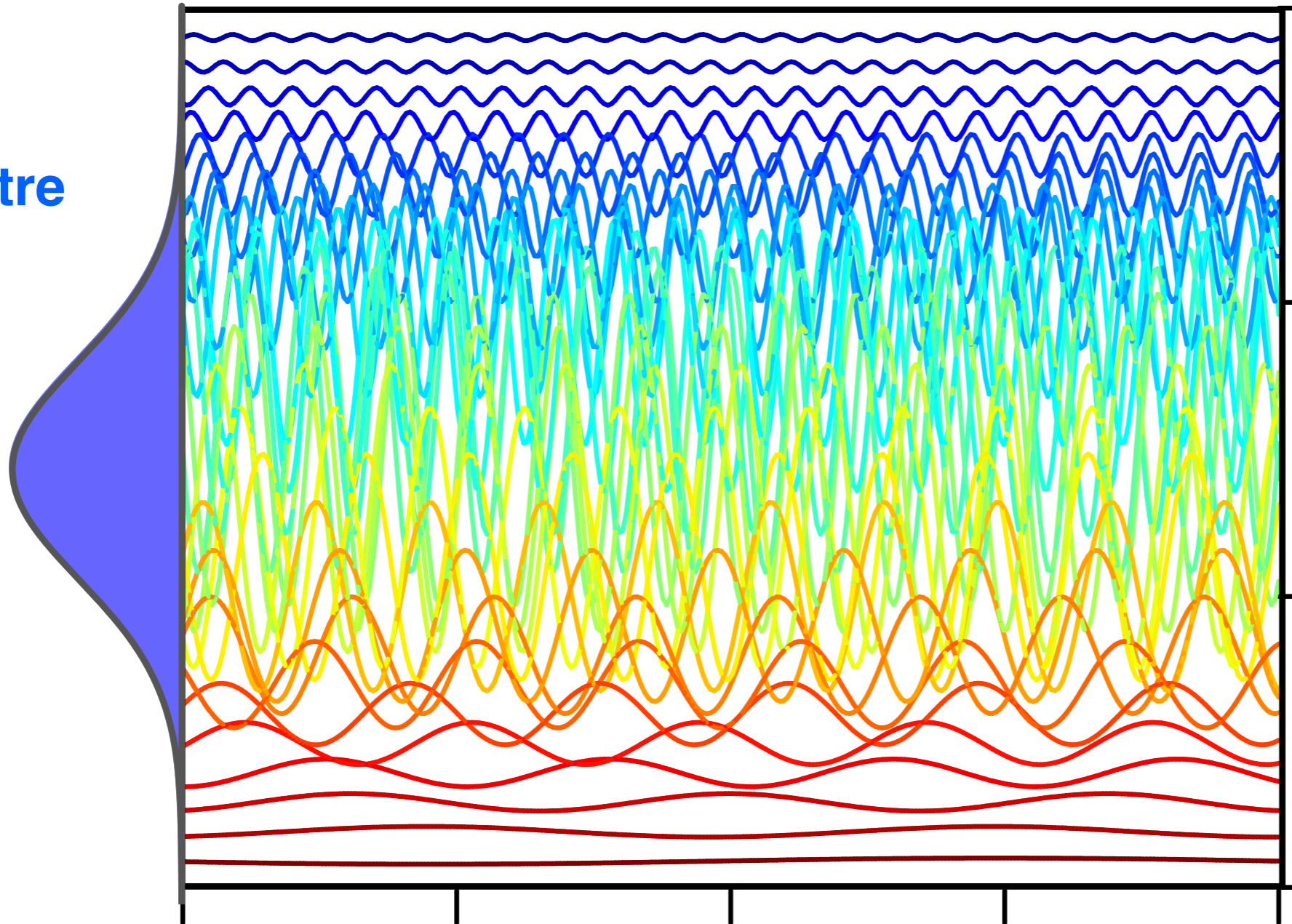


# Spectre et Phase spectrale

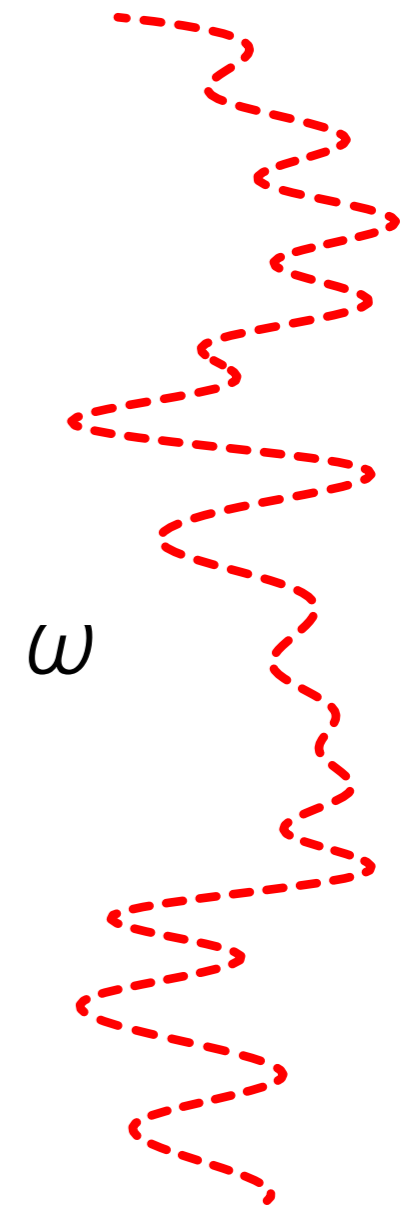
*Superposition de toutes les ondes planes monochromatiques*



**Spectre**



**Phase spectrale**



# Le champ électrique complexe

## Transformée de Fourier

$$\tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \cdot \exp(i\omega t) dt$$

## Transformée de Fourier inverse

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) \cdot \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}$$

### Domaine temporel

$$\delta(t - t_0)$$

$$\exp(-i\omega_0 t)$$

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(t) \cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

### Domaine spectral

$$\exp(i\omega t_0)$$

$$\delta(\omega - \omega_0)$$

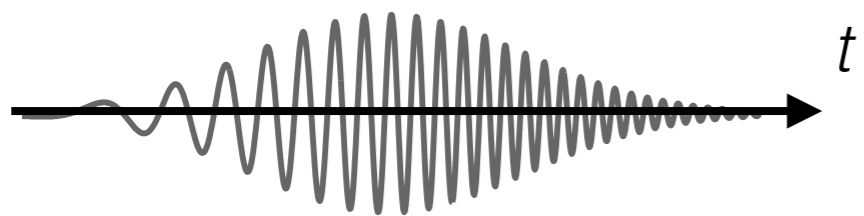
$$\tilde{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{E}}_0(\omega - \omega_0) e^{i\phi_0} + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{E}}_0(\omega + \omega_0) e^{-i\phi_0}$$



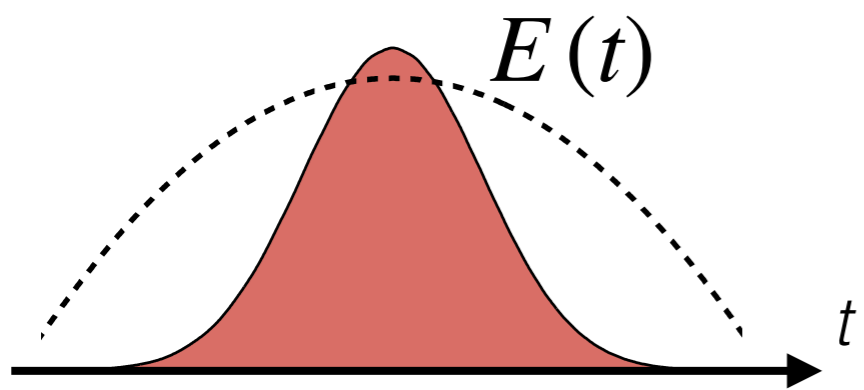
# Le champ électrique complexe

Champ temporel réel  
(champ physique)

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(t) \cos(\omega_0 t - \phi_0)$$



$\uparrow$   $Re[E(t)]$



**Champ temporel complexe**

(contient la même information que le champ réel, mais plus pratique à utiliser)

**TF**



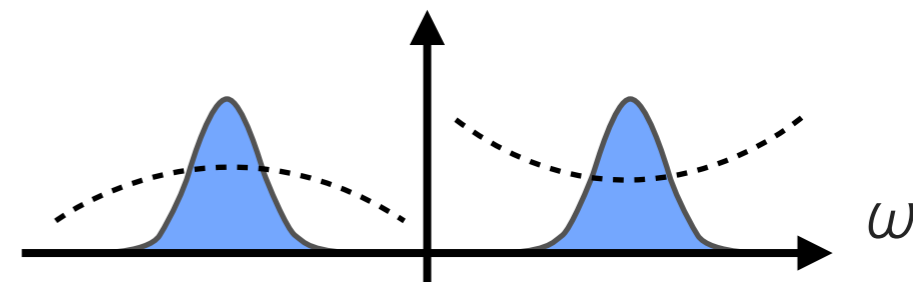
**Transformée de Hilbert**

**TF<sup>-1</sup>**



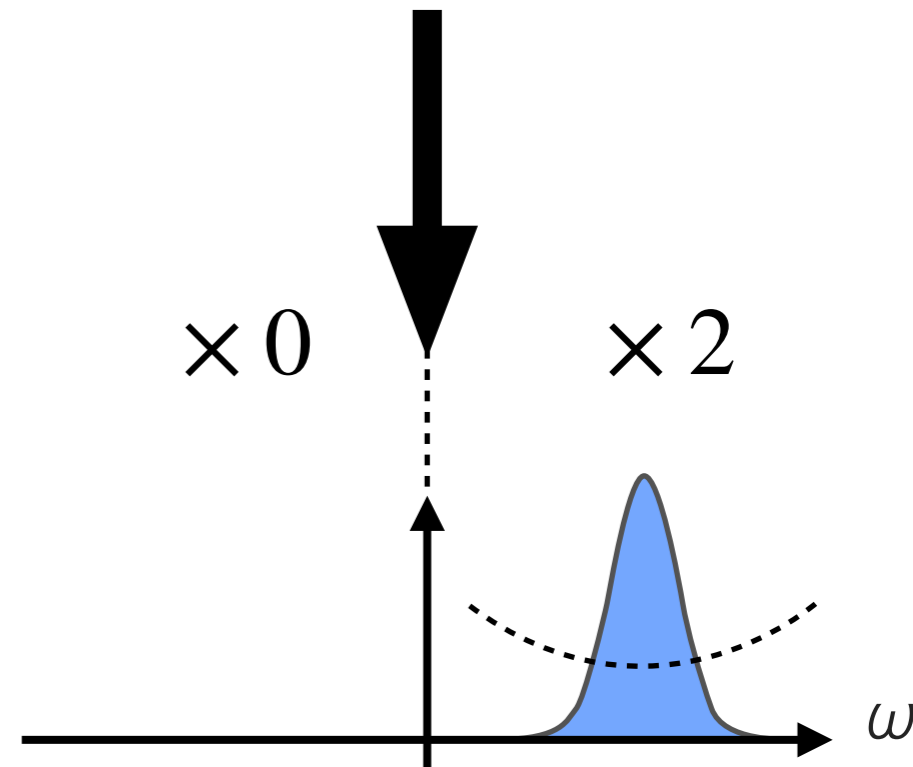
Champ spectral hermitien

$$\tilde{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{E}}_0(\omega - \omega_0) e^{i\phi_0} + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{E}}_0(\omega + \omega_0) e^{-i\phi_0}$$



$\times 0$

$\times 2$



$\tilde{\mathcal{E}}(\omega)$   
Champ spectral  
(champ physique)

# Le champ électrique complexe

## Transformée de Fourier

$$\tilde{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \cdot \exp(i\omega t) dt$$

## Transformée de Fourier inverse

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) \cdot \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi}$$

### Domaine temporel

$$\delta(t - t_0)$$

$$\exp(-i\omega_0 t)$$

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(t) \cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

### Domaine spectral

$$\exp(i\omega t_0)$$

$$\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{E}}_0(\omega - \omega_0) e^{i\phi_0} + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{E}}_0(\omega + \omega_0) e^{-i\phi_0}$$

## Du champ réel au champ complexe

Champ complexe

$$E(t) = \mathcal{H}[\mathcal{E}(t)]$$

Transformée de Hilbert

Champ électrique réel

## Du champ complexe au champ réel

Partie réelle

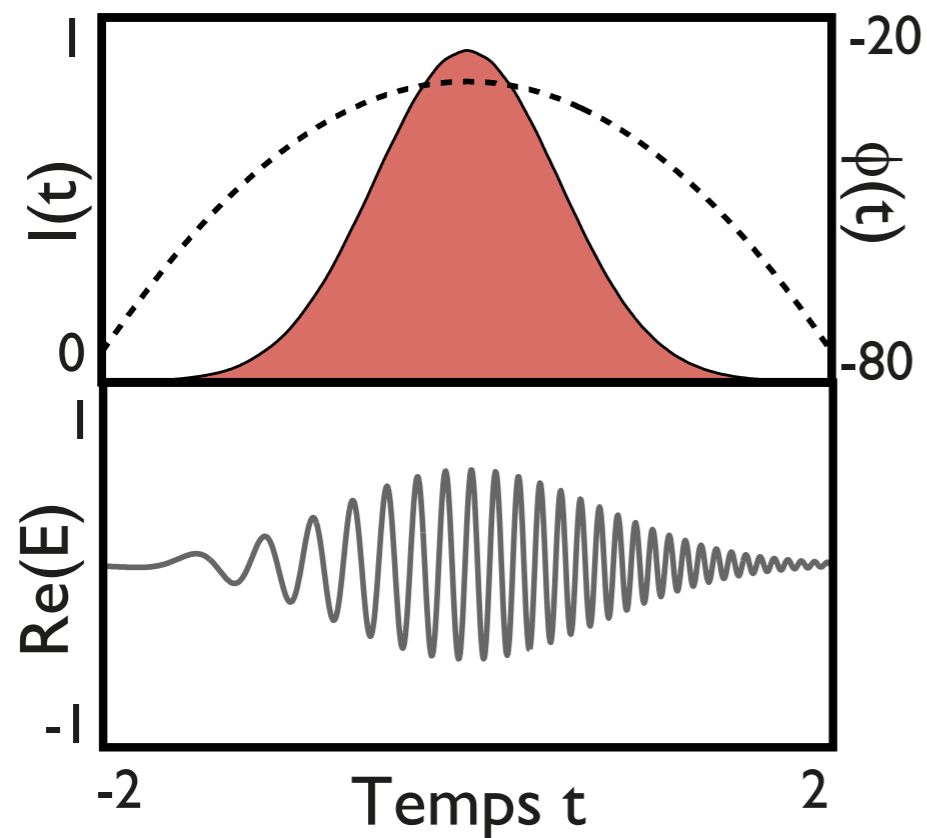
$$\mathcal{E}(t) = \text{Re}[E(t)]$$

# L'impulsion dans le domaine temporel

## Domaine temporel

$$E(t) = \sqrt{I(t)} \cdot \exp(i\phi(t))$$

$$\mathcal{E}(t) = \sqrt{I(t)} \cdot \cos(\phi(t))$$



**Champ électrique  
réel**

$$\mathcal{E}(t) = \text{Re}[E(t)]$$

**Intensité  
temporelle**

$$I(t) = |E(t)|^2$$

**Phase temporelle**

$$\phi(t) = \arg[E(t)]$$

**Fréquence  
instantanée**

$$\Omega(t) = -d\phi/dt$$

# L'impulsion dans le domaine spectral

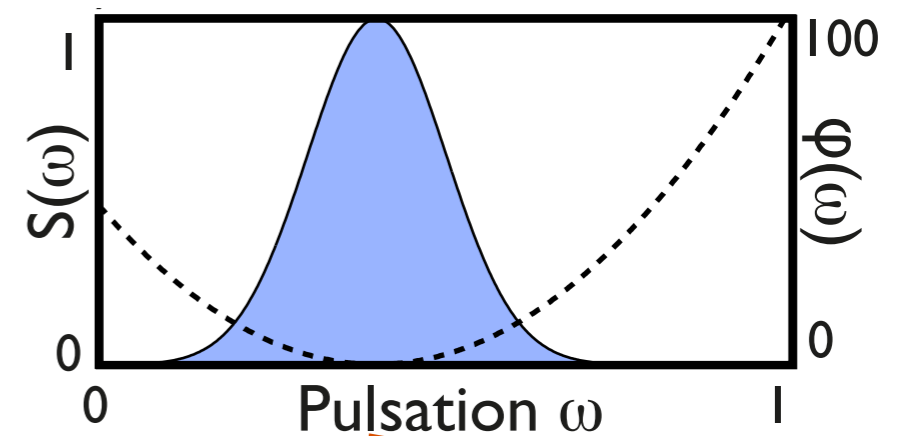
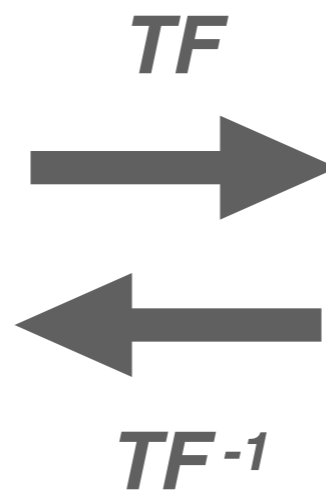
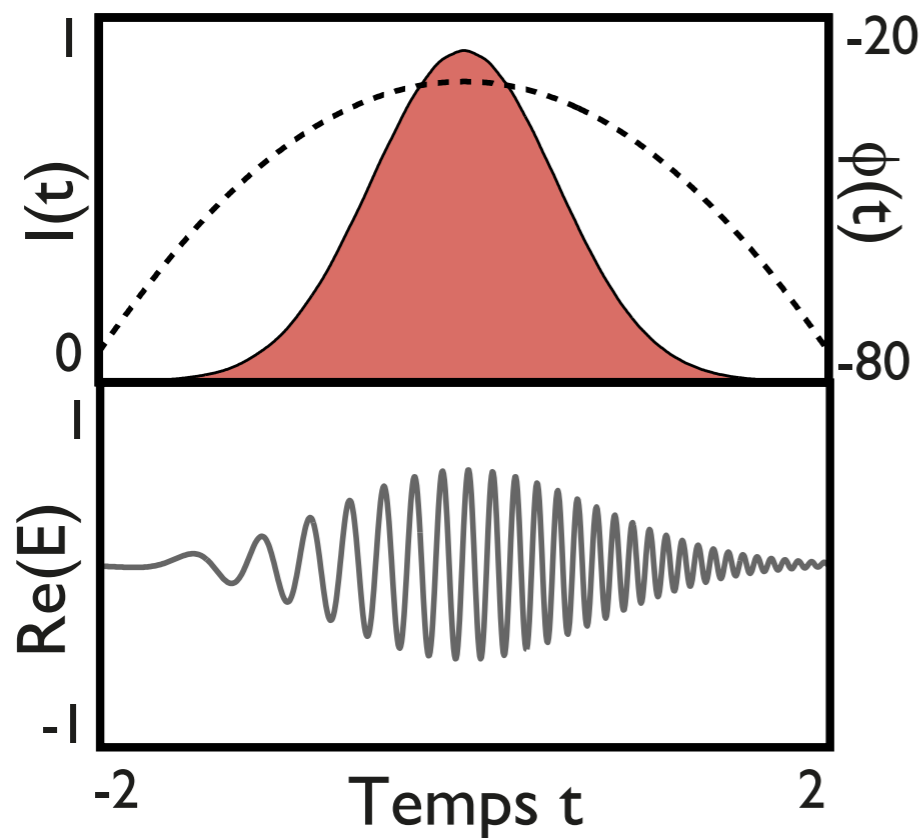
## Domaine temporel

$$E(t) = \sqrt{I(t)} \cdot \exp(i\phi(t))$$

$$\mathcal{E}(t) = \sqrt{I(t)} \cdot \cos(\phi(t))$$

## Domaine spectral

$$\tilde{E}(\omega) = \sqrt{S(\omega)} \cdot \exp(i\varphi(\omega))$$



**Spectre et phase spectrale**

Description utilisée dans **SPIDER** et **RABBIT**

Iaconis and Walmsley, Opt. Lett., **23**, 792-794 (1998)

H.G. Muller, App. Phys. B, **74**, S17-S21 (2002)

**Spectre**

**Phase spectrale**

**Retard de groupe**  
(group delay)

**Dispersion du retard de groupe**  
(group delay dispersion)

$$S(\omega) = \left| \tilde{E}(\omega) \right|^2$$

$$\varphi(\omega) = \arg \left[ \tilde{E}(\omega) \right]$$

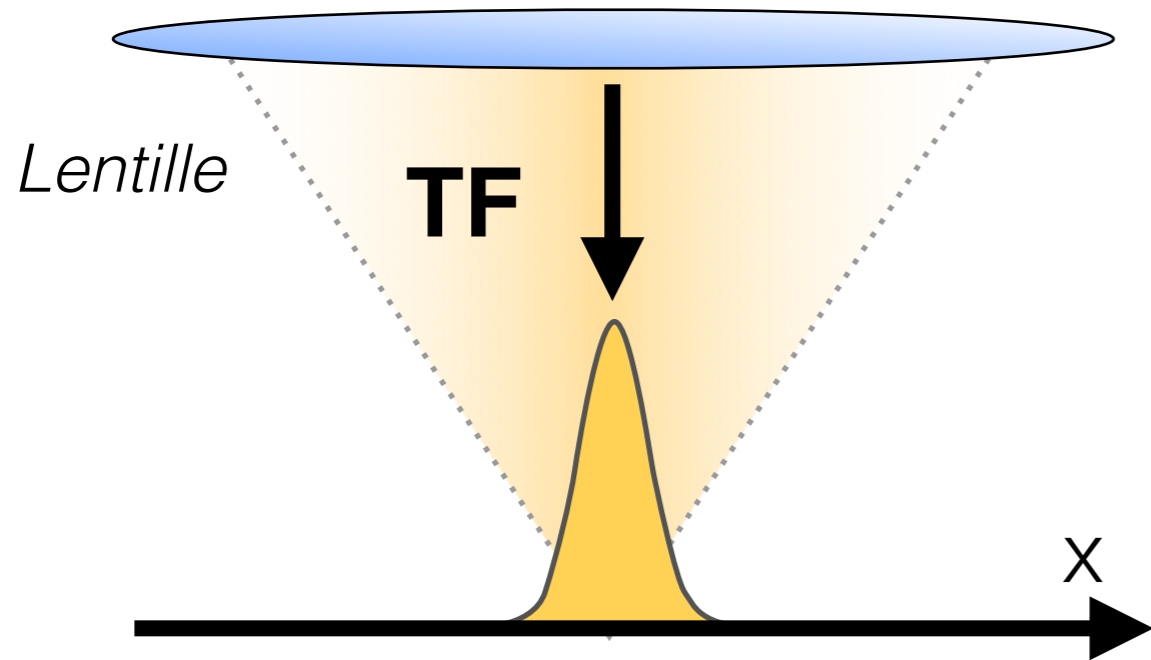
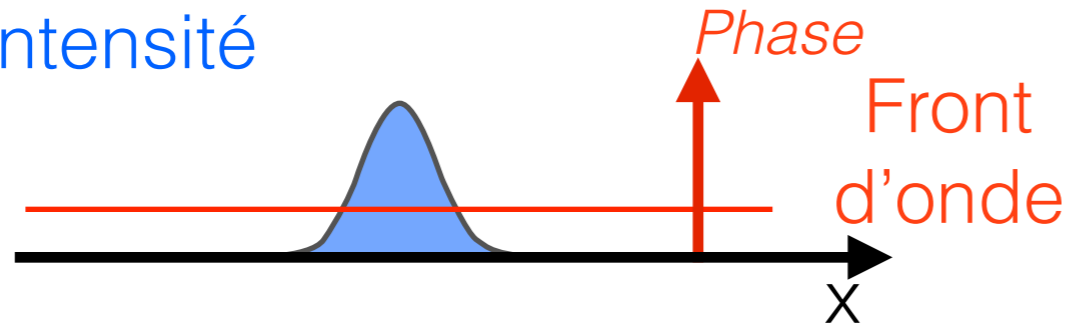
$$GD(\omega) = \frac{d\varphi}{d\omega}$$

$$GDD(\omega) = \frac{d^2\varphi}{d\omega^2}$$

# Analogie spatial-spectral

## Domaine spatial

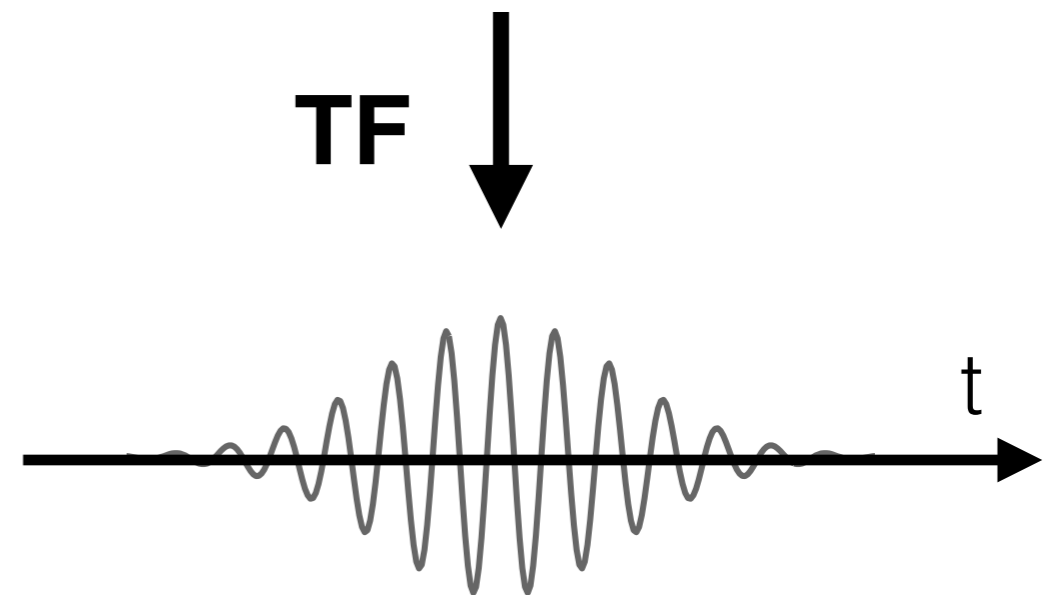
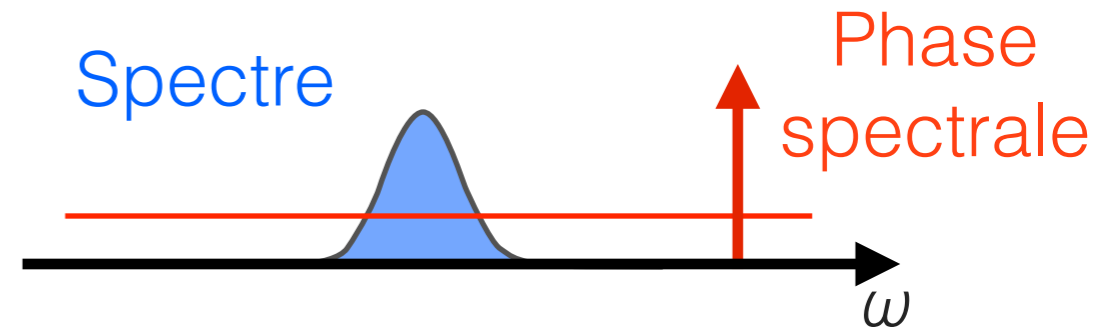
Profil d'intensité



*Faisceau limité par la diffraction*

## Domaine spectral

Spectre

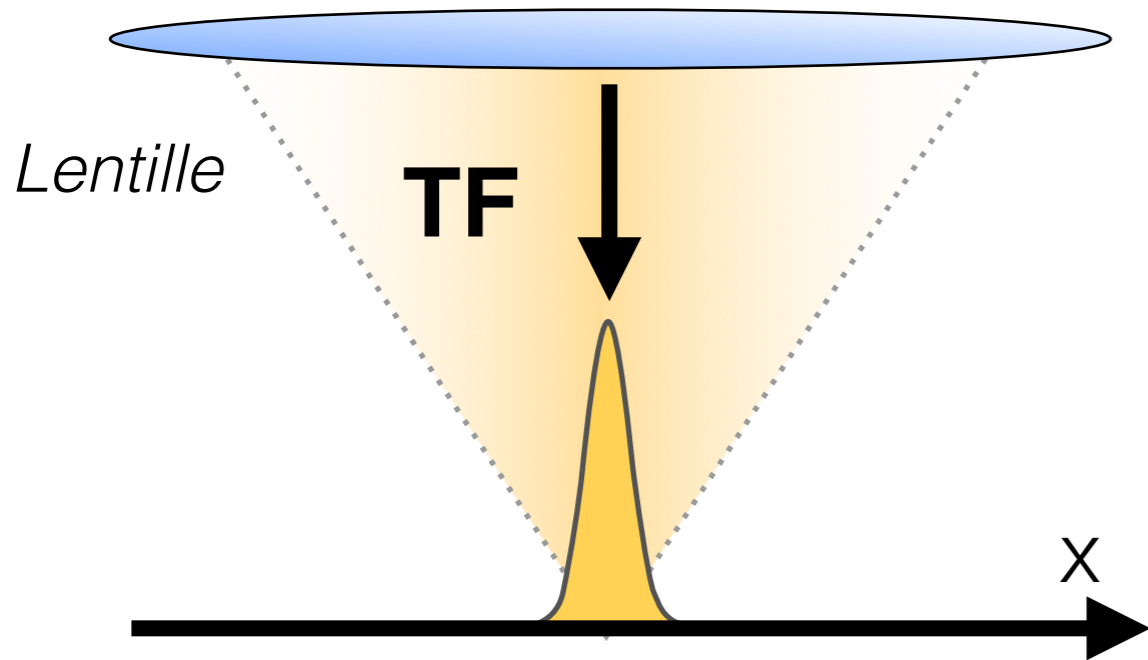
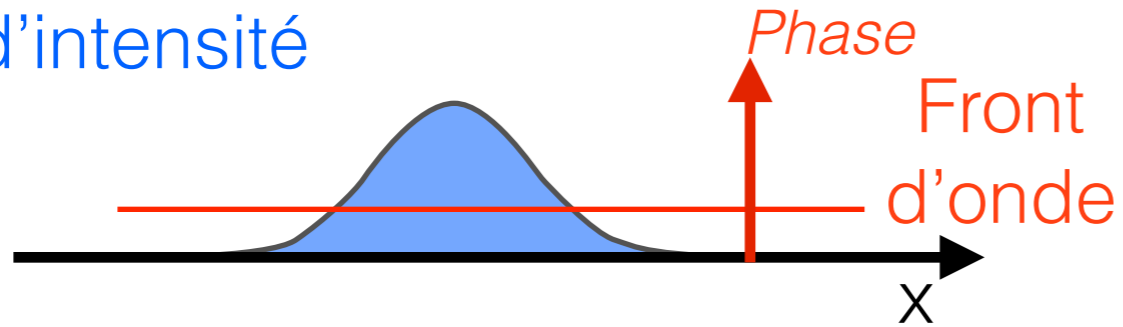


*Impulsion limitée par Fourier*

# Analogie spatial-spectral

## Domaine spatial

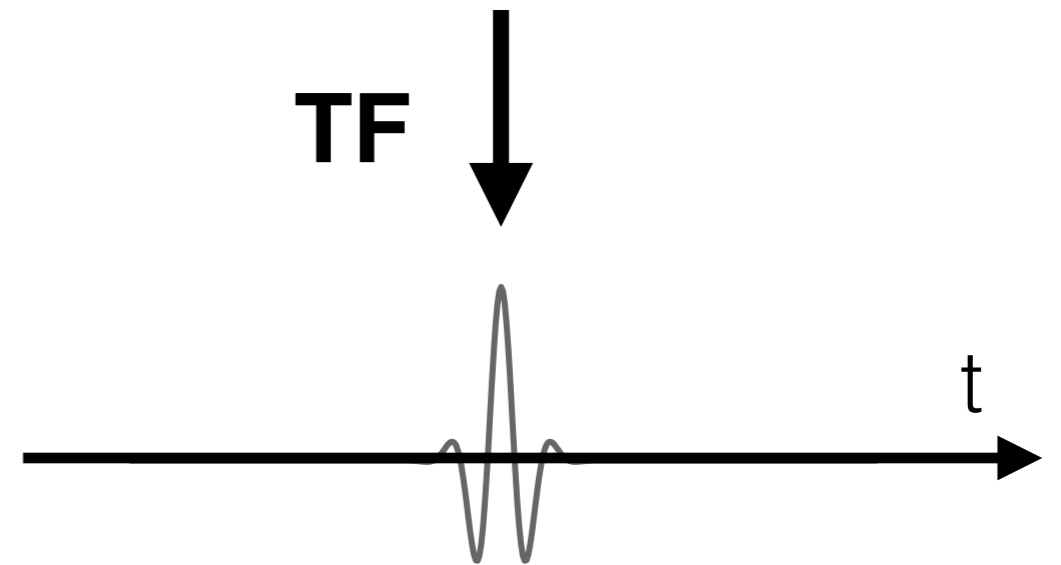
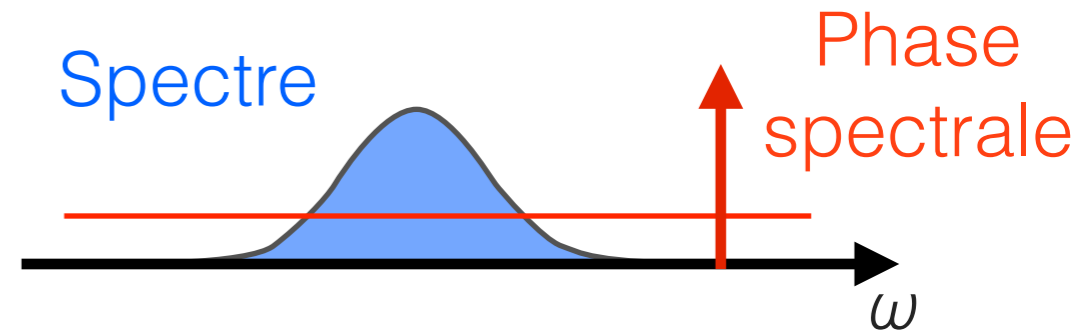
Profil d'intensité



*Faisceau limité par la diffraction*

## Domaine spectral

Spectre



*Impulsion limitée par Fourier*

# Valeurs moyennes et largeurs RMS de l'impulsion

Ecart-type (largeur RMS) d'une variable  $x$  :  $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

Instant moyen :  $\langle t \rangle = \int |E(t)|^2 \cdot t dt$

L'énergie de l'impulsion est normalisée :

Pulsation centrale :  $\langle \omega \rangle = \int |\tilde{E}(\omega)|^2 \cdot \omega \frac{d\omega}{2\pi}$

$$\int |E(t)|^2 dt = \int |E(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 1$$

**Relation fondamentale entre les largeurs RMS temporelle et spectrale d'une impulsion :**

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$$

(égalité atteinte pour des Gaussiennes limitées par Fourier)

# Durée RMS de l'impulsion

Ecart-type (largeur RMS) d'une variable  $x$  :  $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

Valeur moyenne du retard de groupe :

$$\langle GD \rangle = \int \left| \tilde{E}(\omega) \right|^2 \cdot GD(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

L'énergie de l'impulsion est normalisée :

$$\int |E(t)|^2 dt = \int |E(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 1$$

**Durée RMS d'une impulsion arbitraire :**

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t_{\varphi=0}^2 + \Delta GD^2}$$

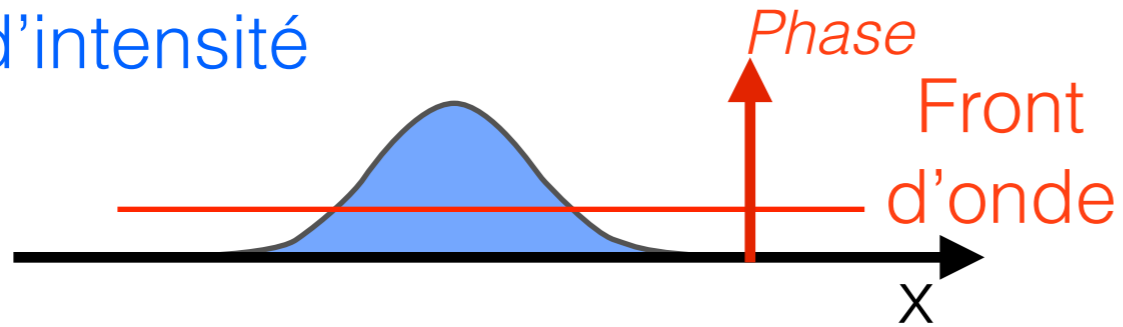
Toute non-linéarité de la phase spectrale ( $\Delta GD \neq 0$ ) étire temporellement l'impulsion



# Analogie spatial-spectral

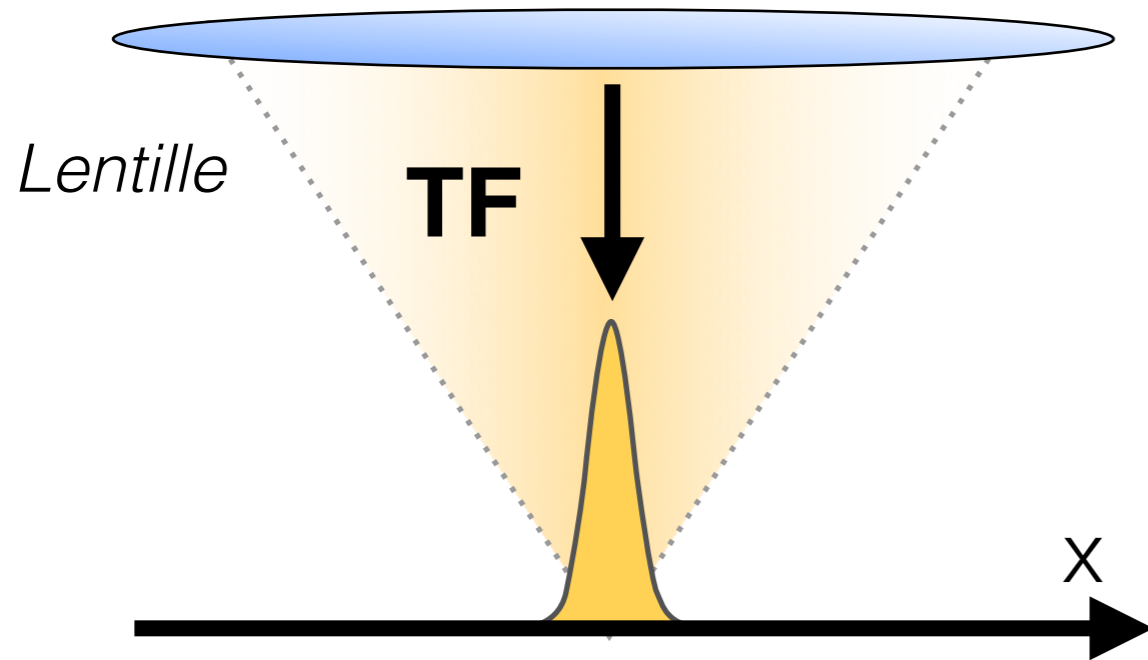
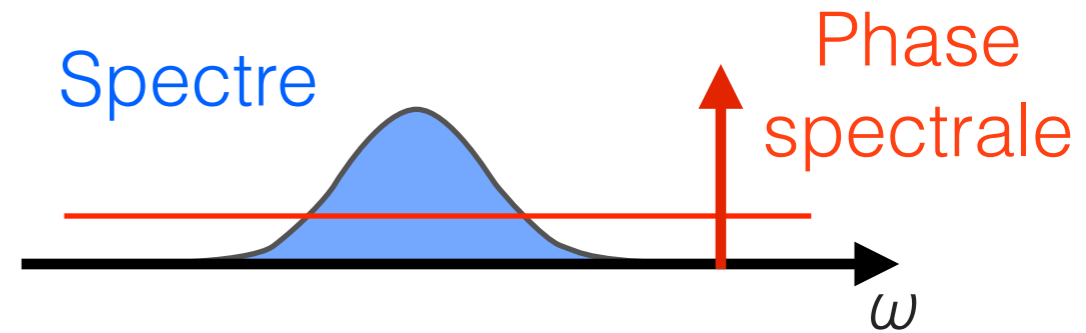
## Domaine spatial

Profil d'intensité

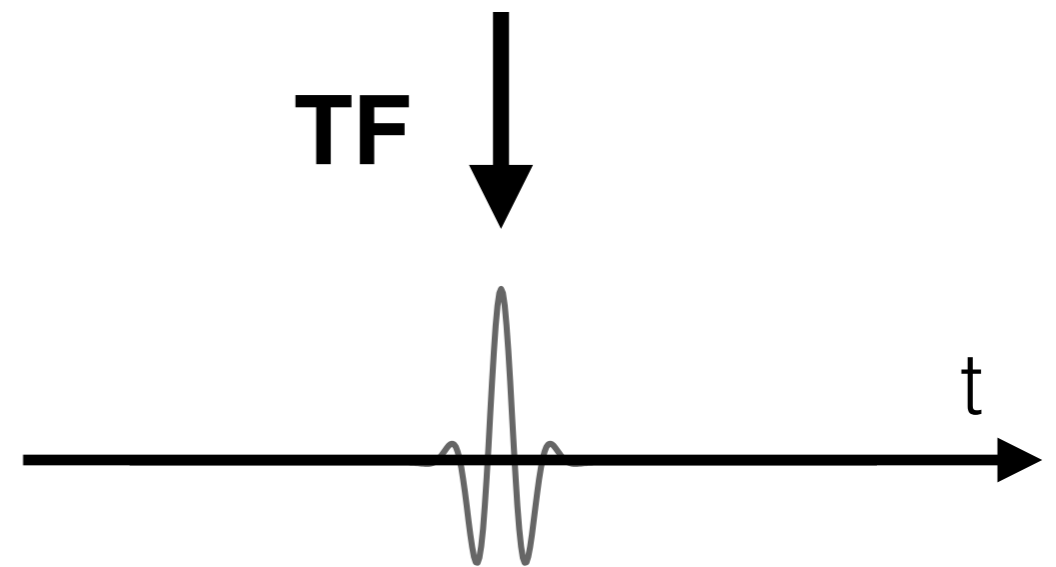


## Domaine spectral

Spectre



*Faisceau limité par la diffraction*



*Impulsion limitée par Fourier*

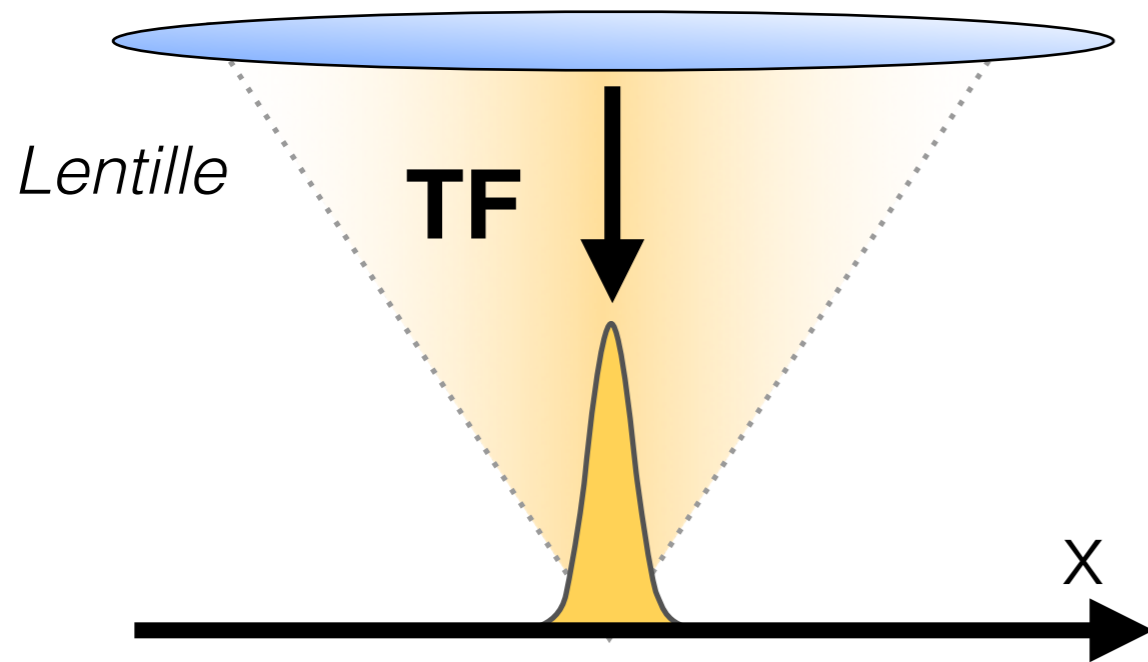
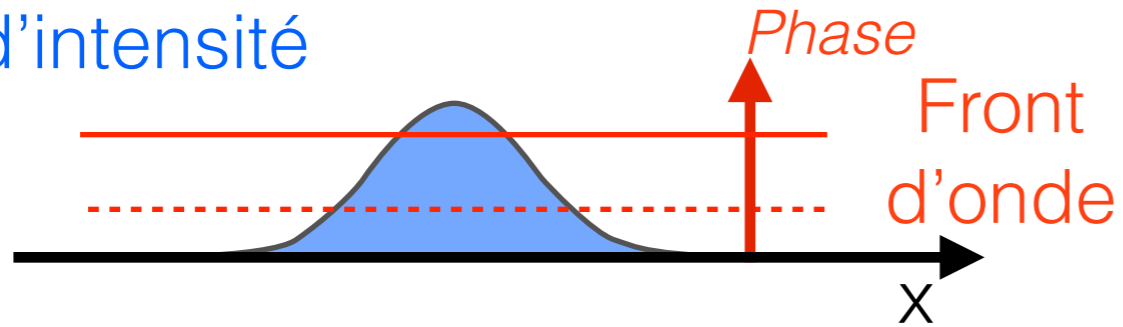
<i>Développement</i>	ordre 0	ordre 1	ordre 2	3 et plus
<b><i>Spatial</i></b>	Piston			
<b><i>Temporel</i></b>	CEP*			

\***Carrier-Envelope Phase:** Phase de l'enveloppe par rapport à la porteuse

# Analogie spatial-spectral

## Domaine spatial

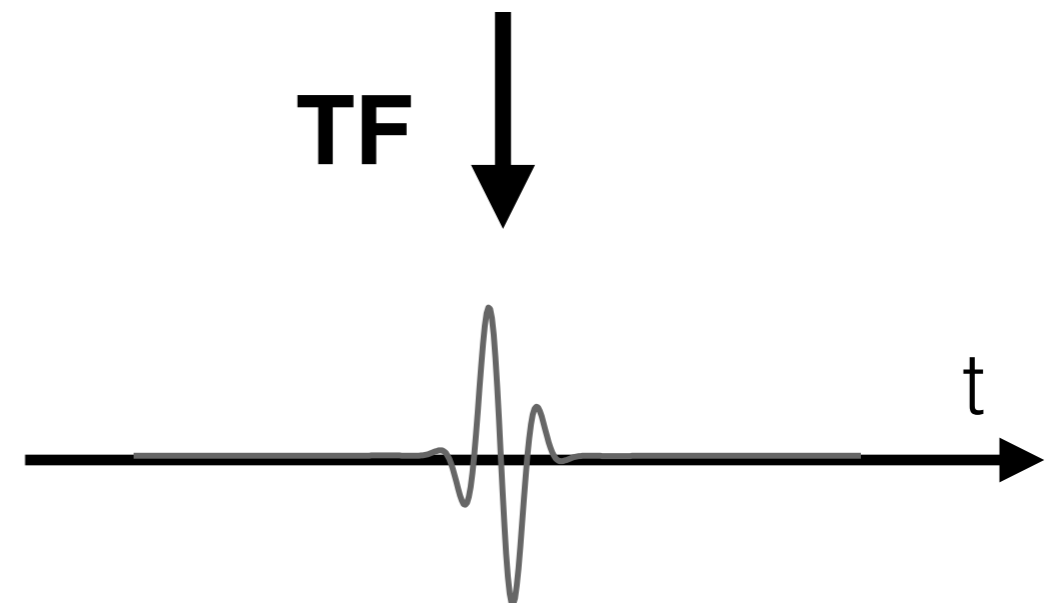
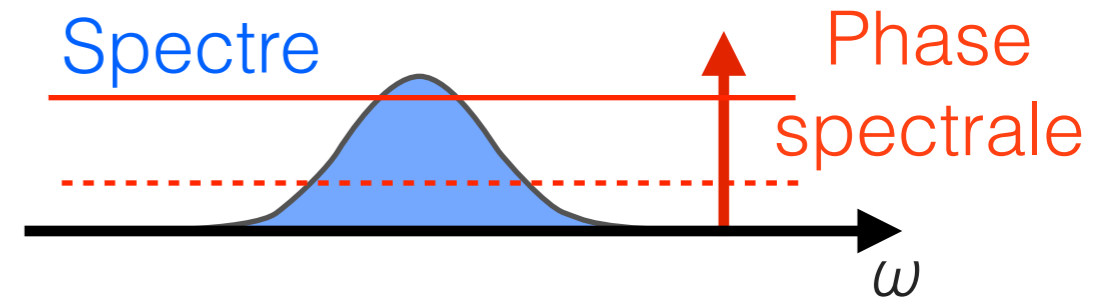
Profil d'intensité



*Faisceau limité par la diffraction*

## Domaine spectral

Spectre



*Impulsion limitée par Fourier*

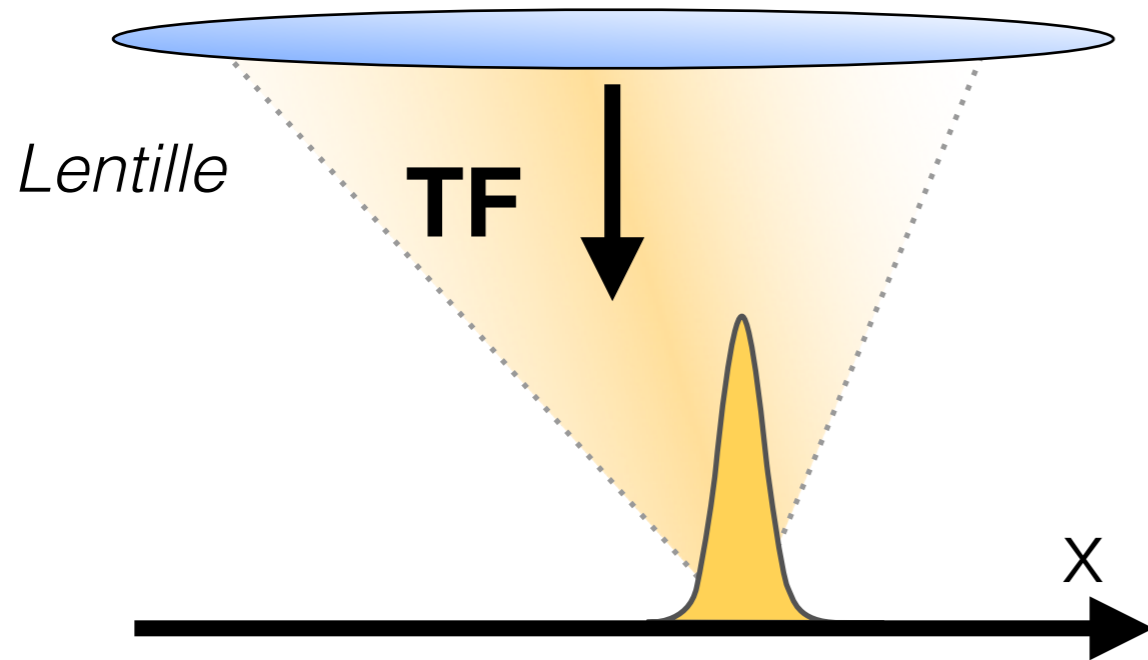
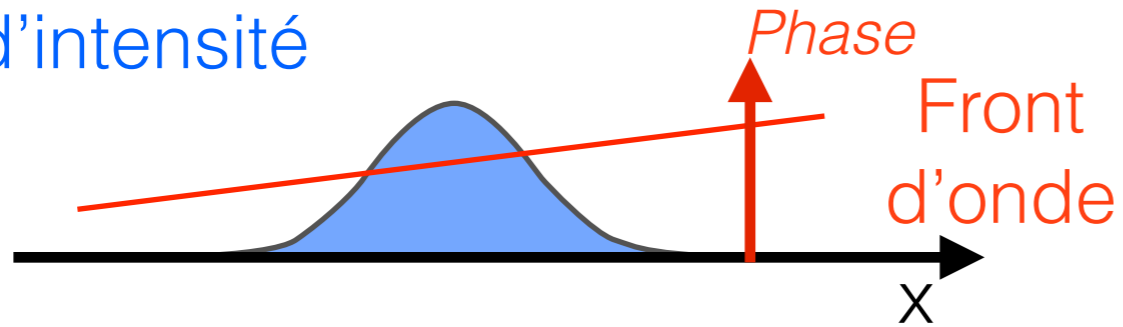
<i>Développement</i>	ordre 0	ordre 1	ordre 2	3 et plus
<b><i>Spatial</i></b>	Piston			
<b><i>Temporel</i></b>	CEP*			

\***Carrier-Envelope Phase:** Phase de l'enveloppe par rapport à la porteuse

# Analogie spatial-spectral

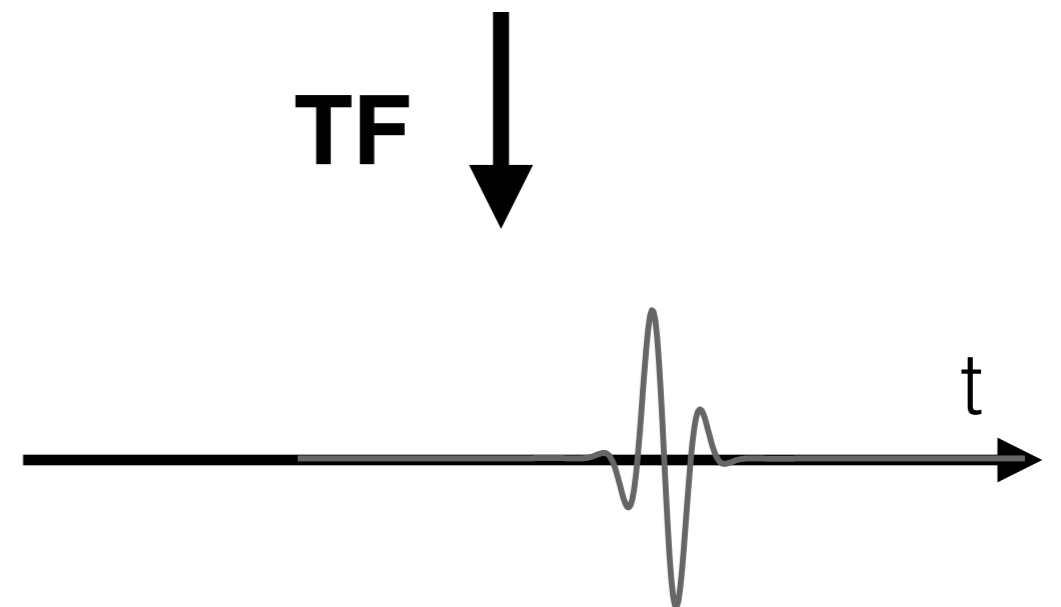
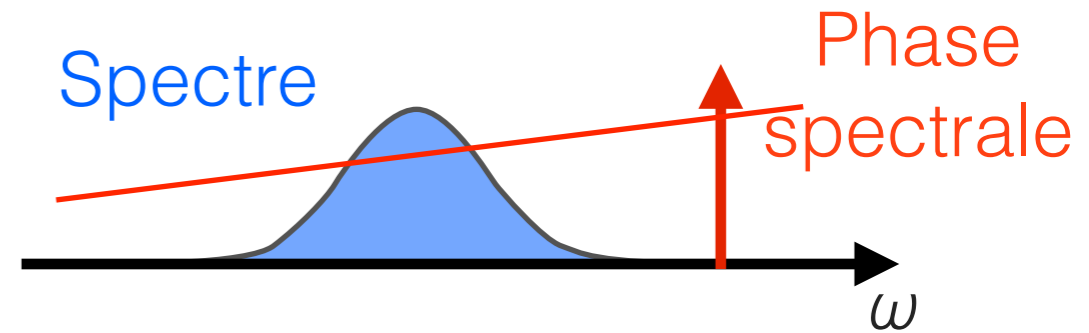
## Domaine spatial

Profil d'intensité



## Domaine spectral

Spectre

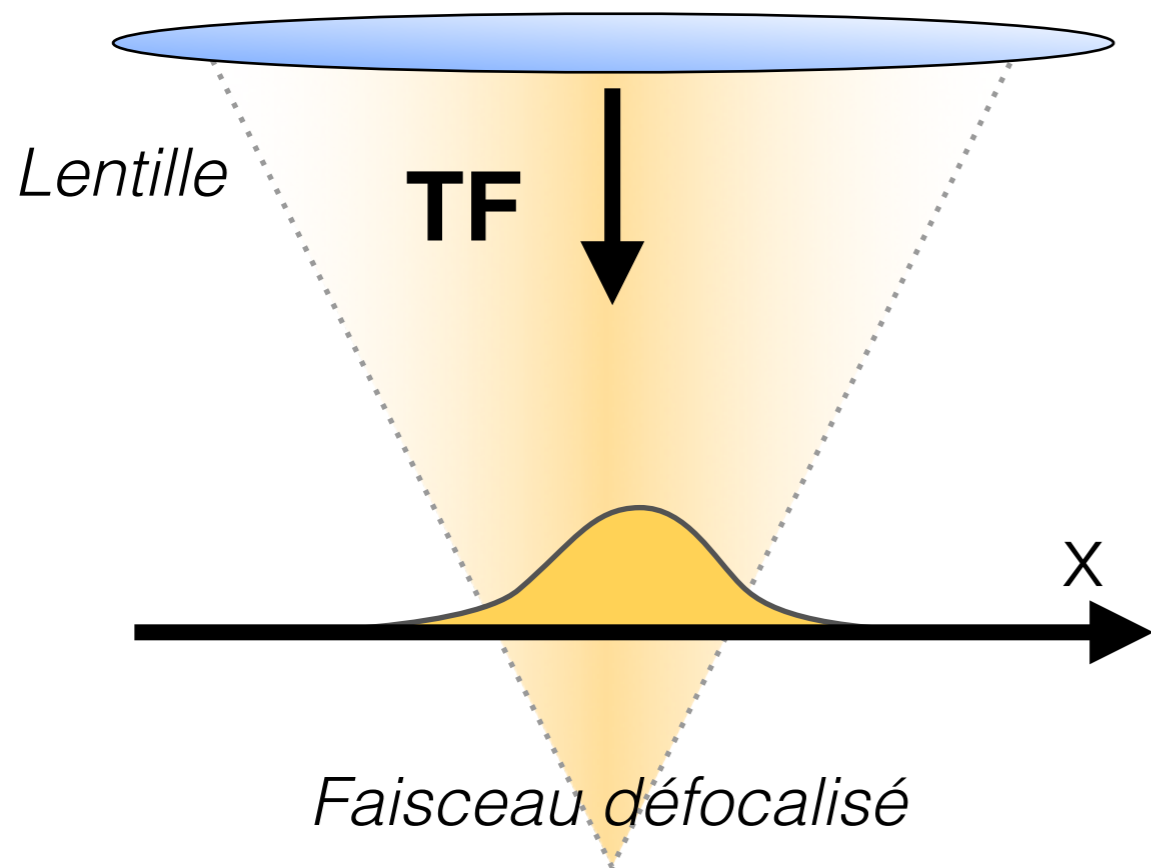
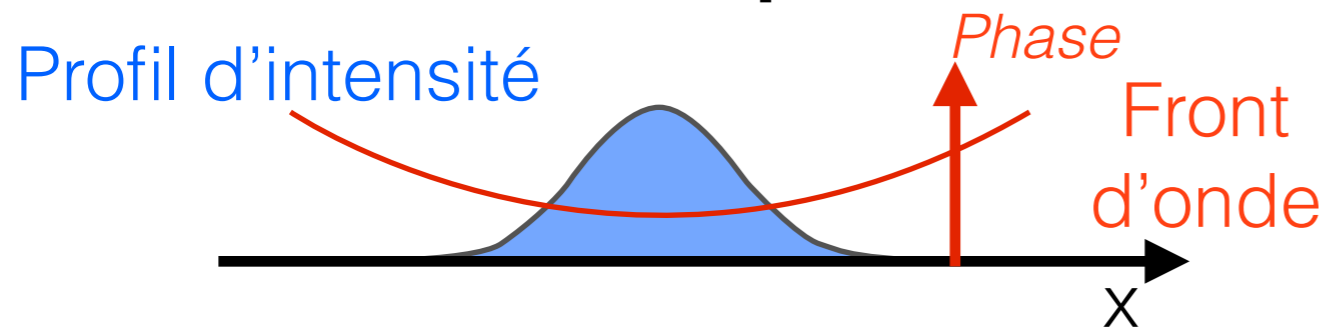


<i>Développement</i>	ordre 0	ordre 1	ordre 2	3 et plus
<b><i>Spatial</i></b>	Piston	Tilt		
<b><i>Temporel</i></b>	CEP*	Retard		

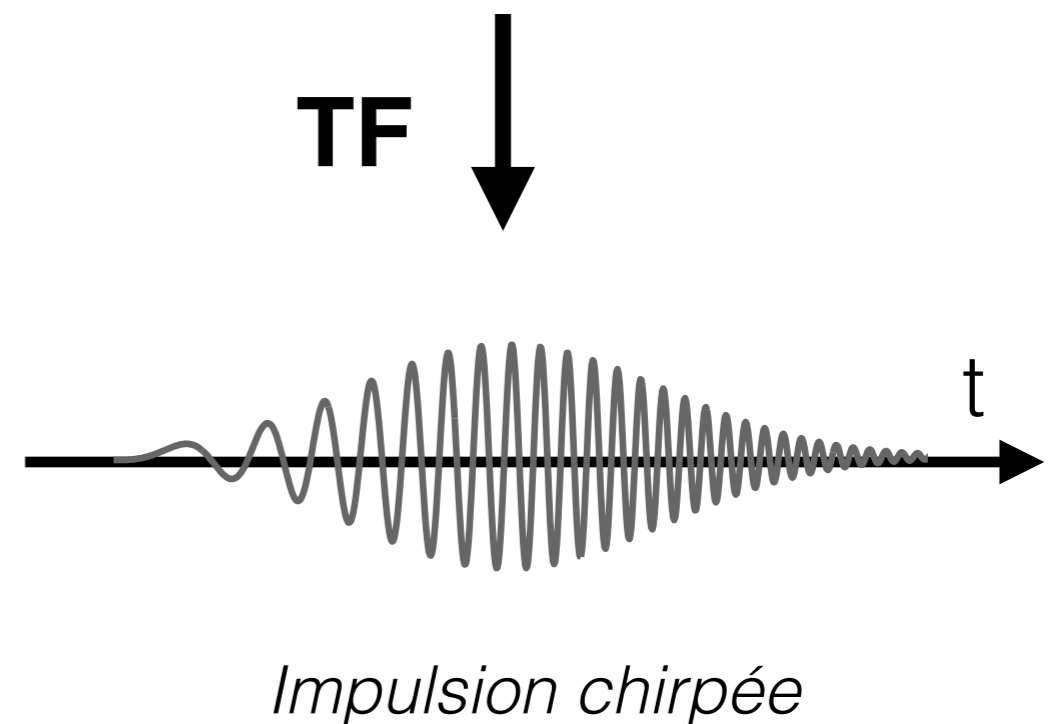
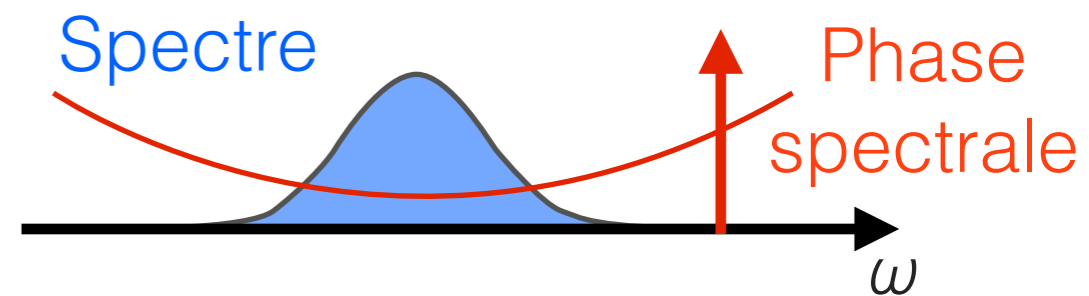
\***Carrier-Envelope Phase:** Phase de l'enveloppe par rapport à la porteuse

# Analogie spatial-spectral

## Domaine spatial



## Domaine spectral



<b>Développement</b>	<b>ordre 0</b>	<b>ordre 1</b>	<b>ordre 2</b>	<b>3 et plus</b>
<b>Spatial</b>	Piston	Tilt	defocus	aberrations
<b>Temporel</b>	CEP*	Retard	chirp	ordres supérieurs

\***Carrier-Envelope Phase:** Phase de l'enveloppe par rapport à la porteuse

## ***Partie II***

# *Représentations Temps-Fréquence*

---

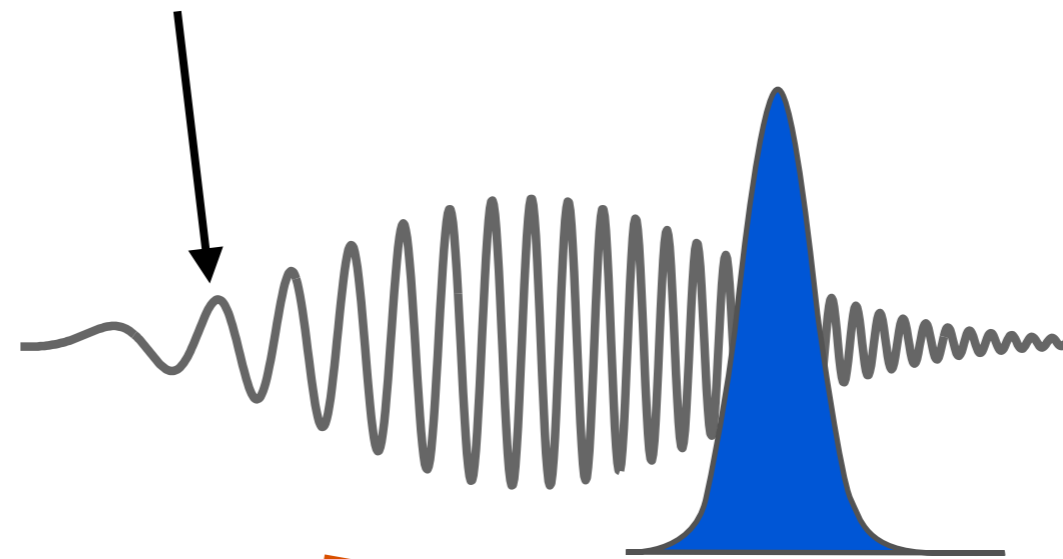
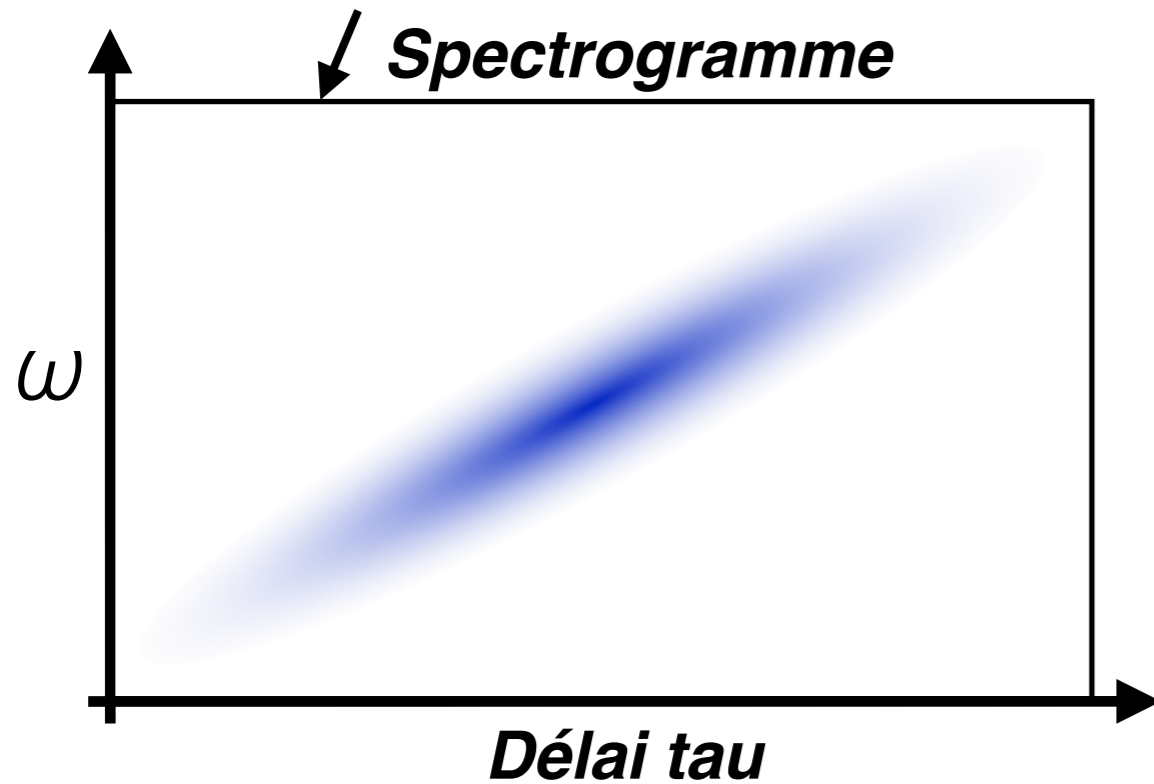
# Spectrogramme

Tranche temporelle de  $E(t)$   
découpée par la porte

$$S(\omega, \tau) = \left| \int E(t) G(t - \tau) e^{i\omega t} dt \right|^2$$

Spectre pour  
chaque délai

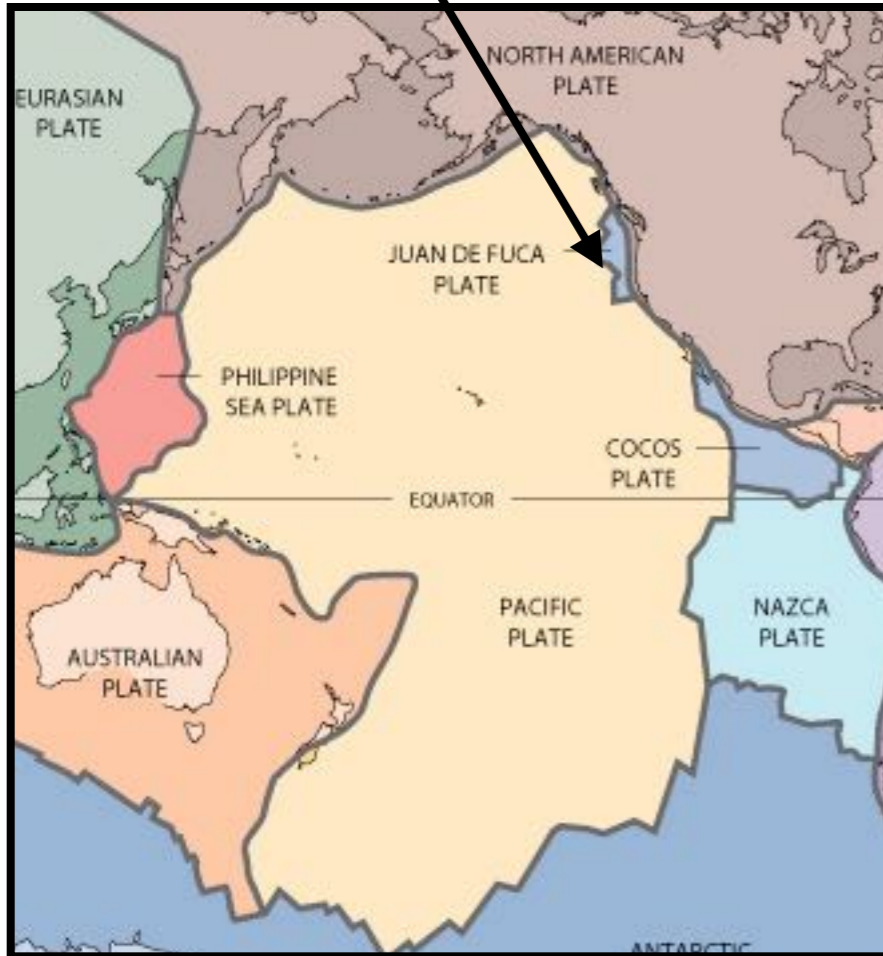
Champ électrique  
de l'impulsion



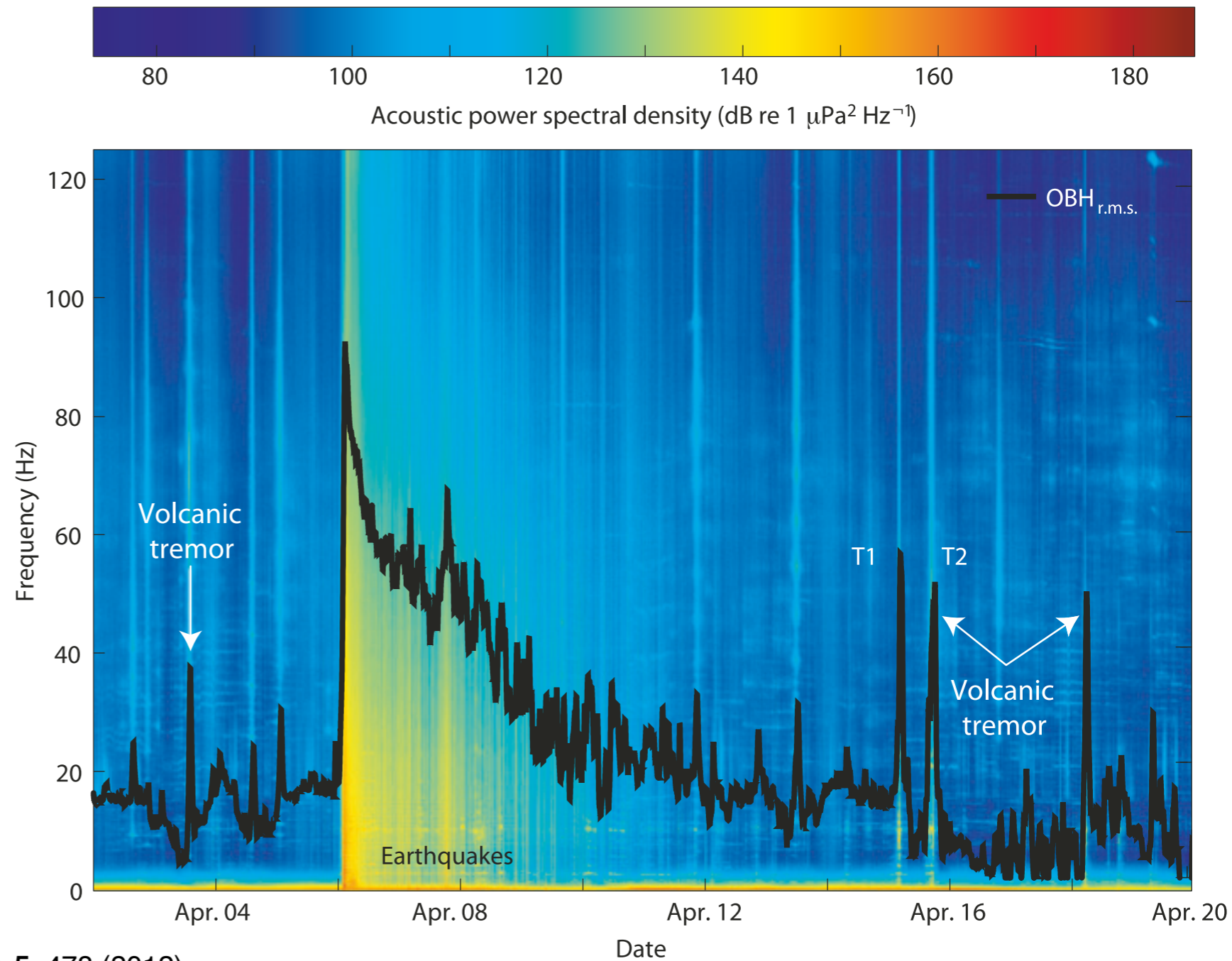
utilisé dans **FROG**  
et dans la **ptychographie temporelle**

# Spectrogramme

Tremblement de terre sous-marin  
du 6 Avril 2011 (magnitude 3.7)



## Spectrogramme d'un tremblement de terre



# Distribution de Wigner

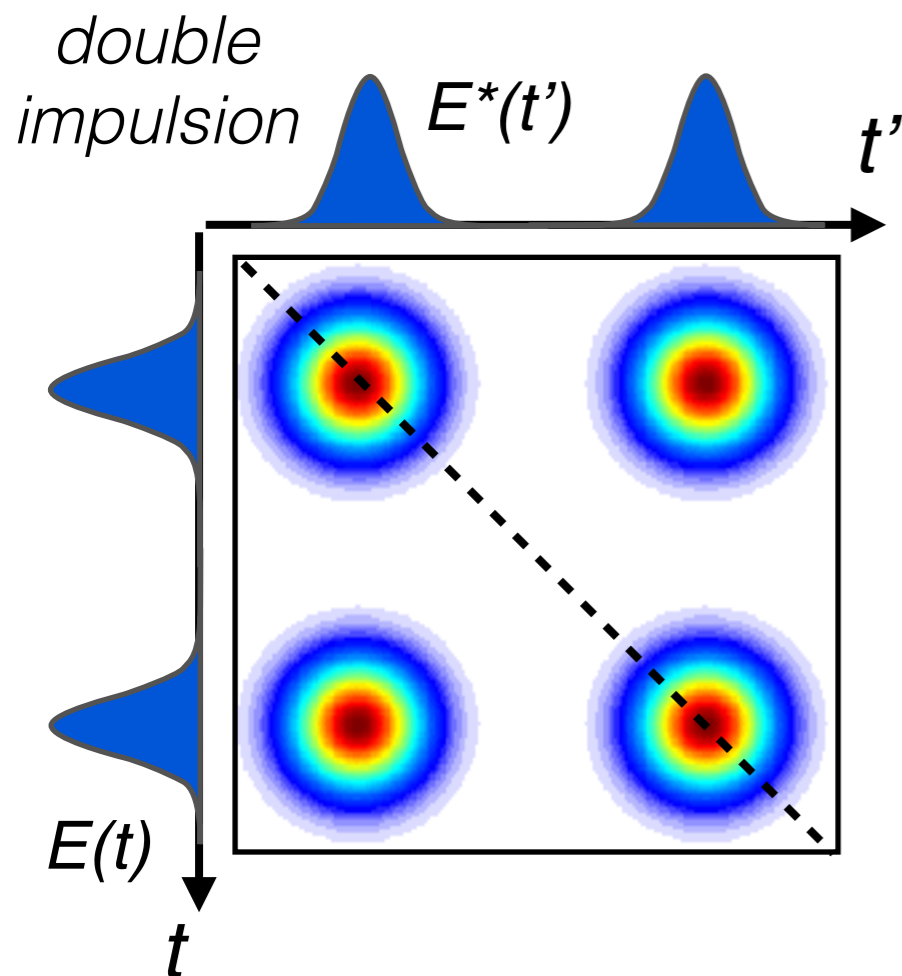
## Distribution de Wigner (ou Wigner-Ville)

dans l'espace des phases  $(\omega, t)$  (espace chronocyclique)

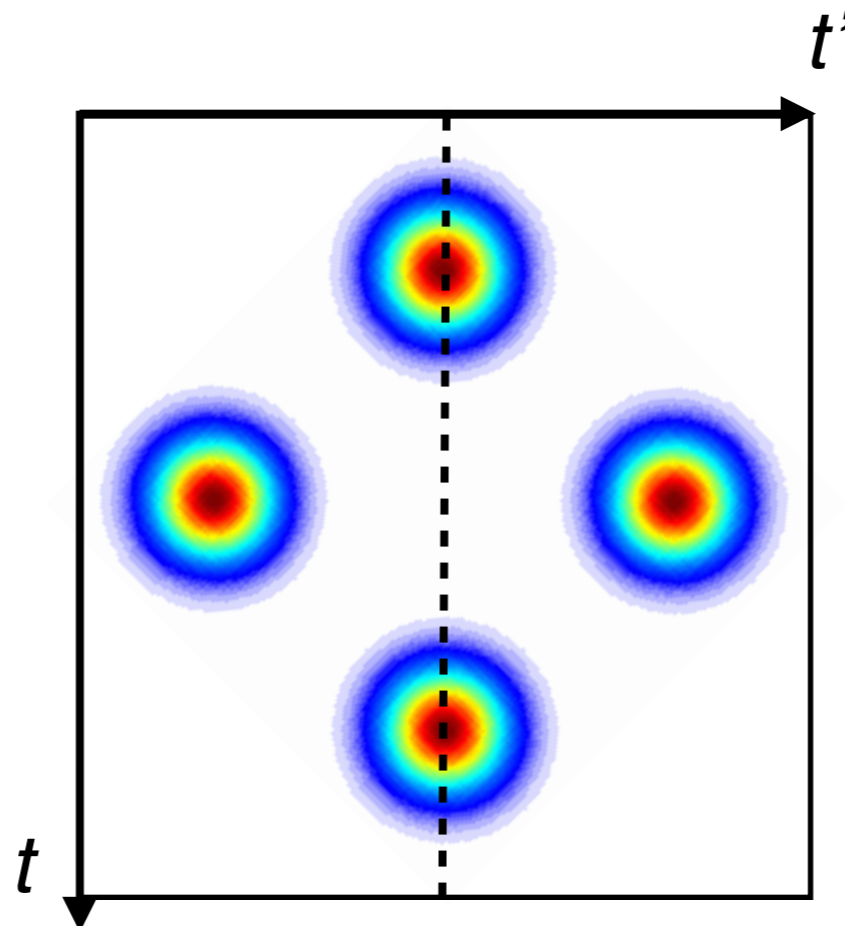
$$W(\omega, t) = \int E\left(t + \frac{t'}{2}\right) E^*\left(t - \frac{t'}{2}\right) e^{i\omega t'} dt'$$

E. Wigner, Phys.Rev., **40** 749 (1932)  
Alonso, Adv. Opt. Photon., **3** 272 (2011)

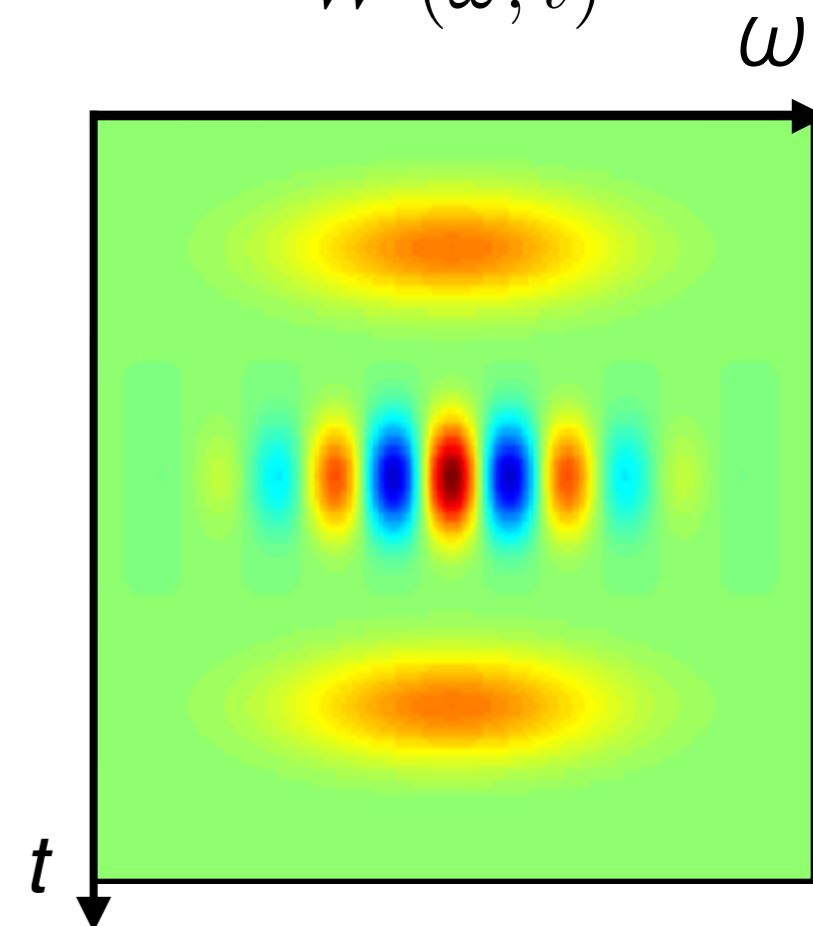
**Etape 1 : fonction de corrélation  $E(t)E^*(t')$**



**Etape 2 : rotation  $E(t+t'/2)E^*(t-t'/2)$**



**Etape 3 : Transformée de Fourier  $W(\omega, t)$**





# Distributions marginales

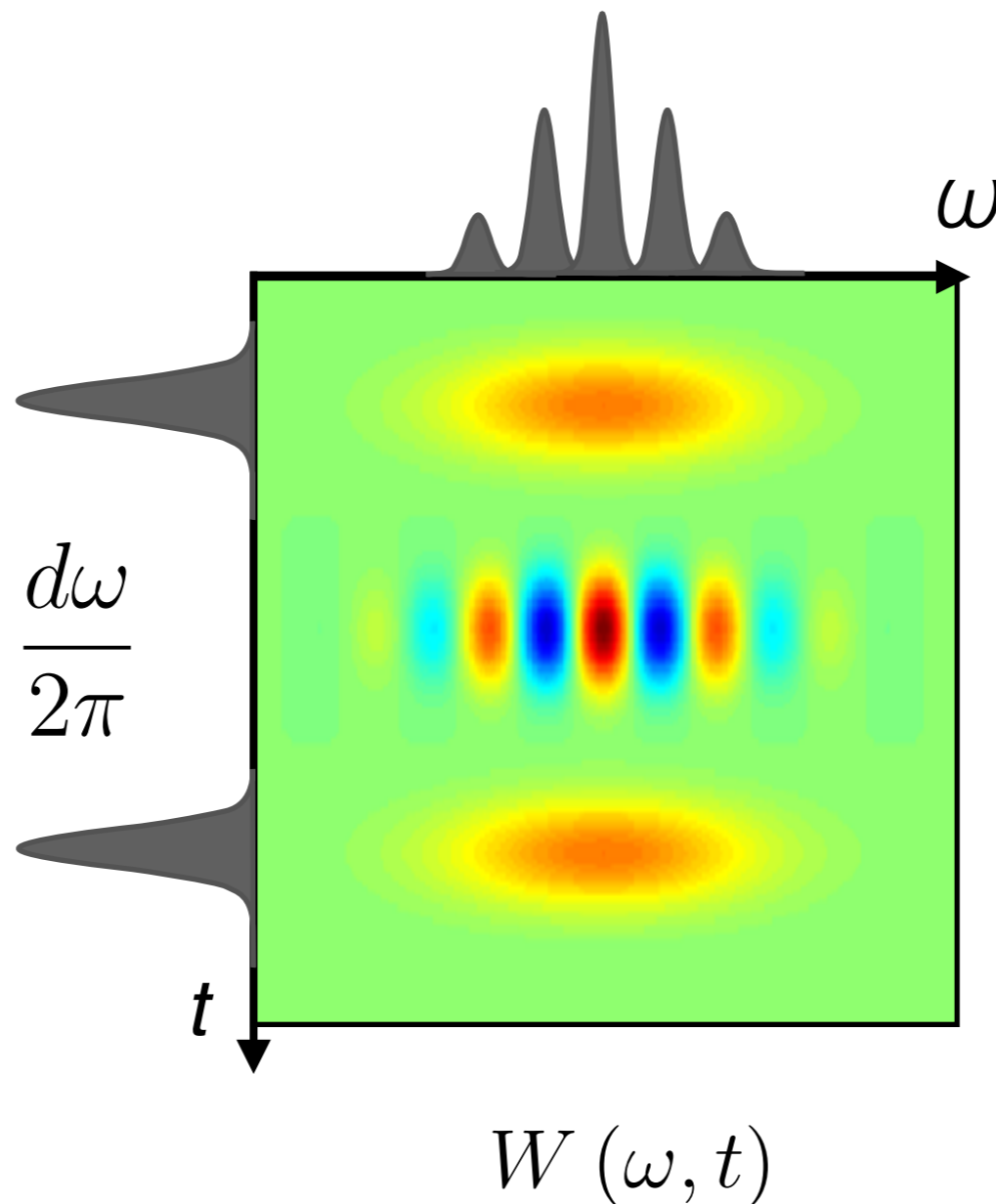
utilisée dans la **tomographie  
chronocyclique** (simplifiée)

**Spectre**  $S(\omega) = \int W(\omega, t) dt$

Beck et al, Opt. Lett., **18**, 2041(1993)  
Dorrer and Kang, Opt. Lett., 28 1481 (2003)

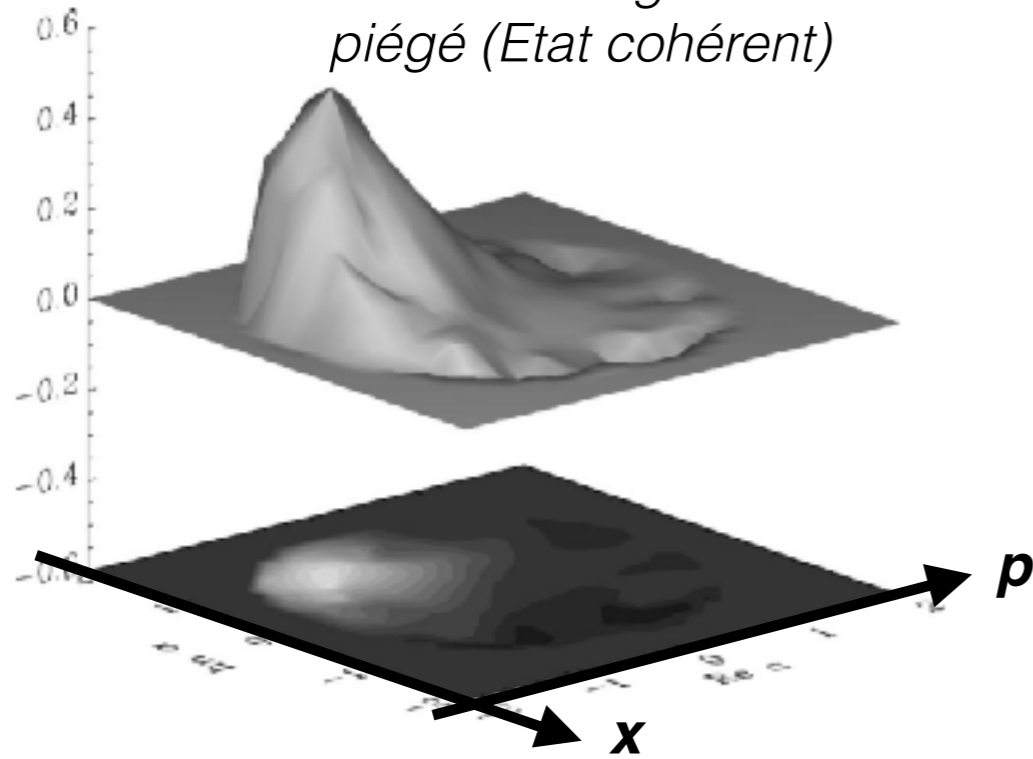
**Intensité temporelle**

$$I(t) = \int W(\omega, t) \frac{d\omega}{2\pi}$$



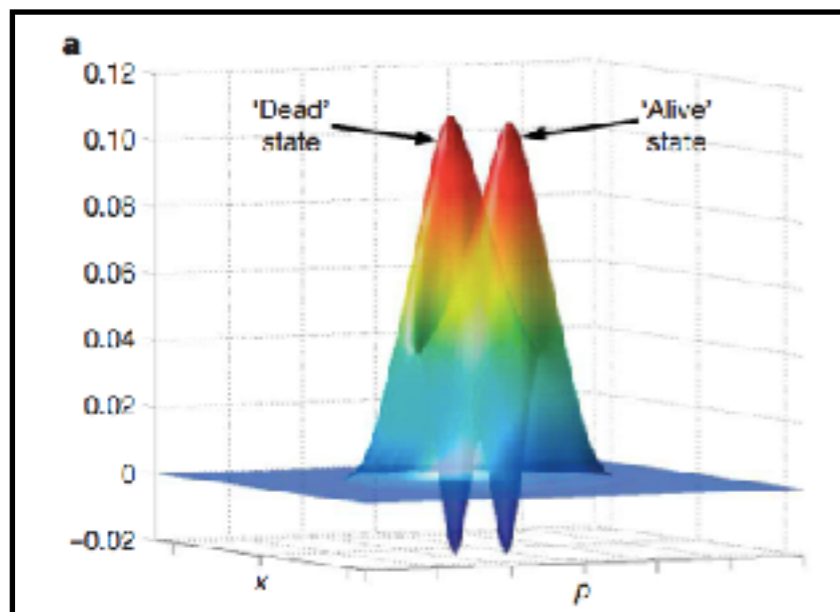
# Distribution de Wigner

Distribution de Wigner d'un ion piégé (Etat cohérent)



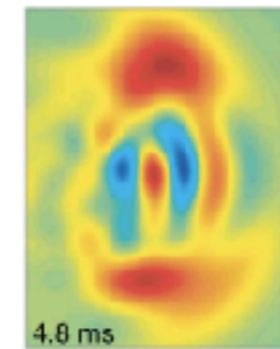
Leibfried et al. Rev. Mod. Phys. 2003

Exemple de distribution de Wigner en optique quantique

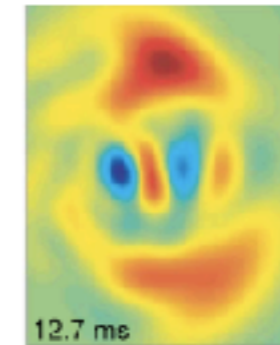


Ourjoumtsev et al, Nature 448, 784 (2007)

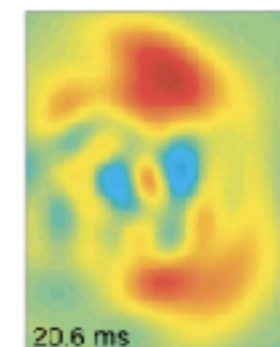
Décohérence d'un état "Chat de Schrödinger" (cavity QED)



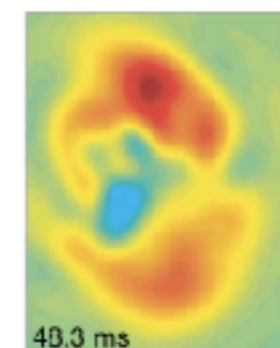
4.8 ms



12.7 ms



20.6 ms



48.3 ms

Deléglise et al. Nature. 2008

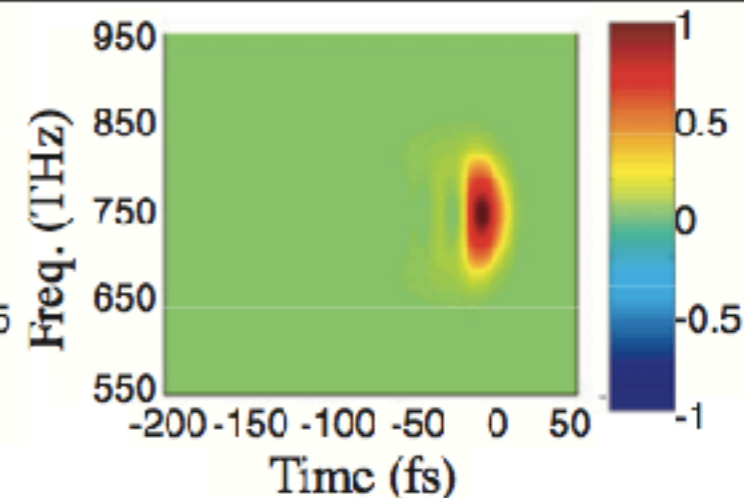
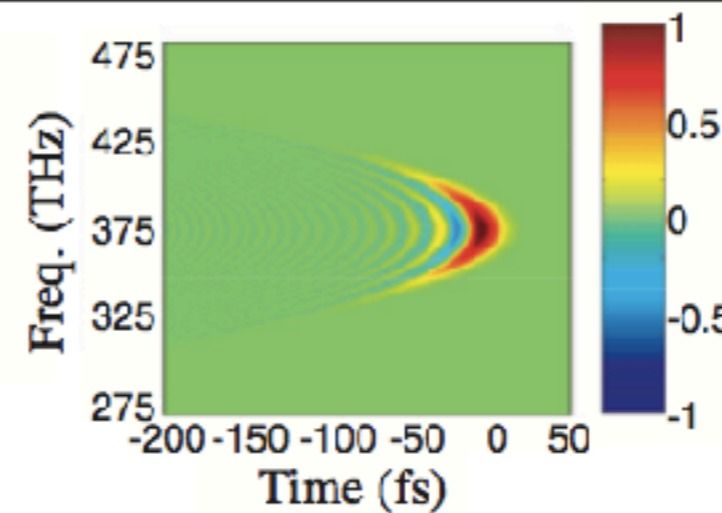
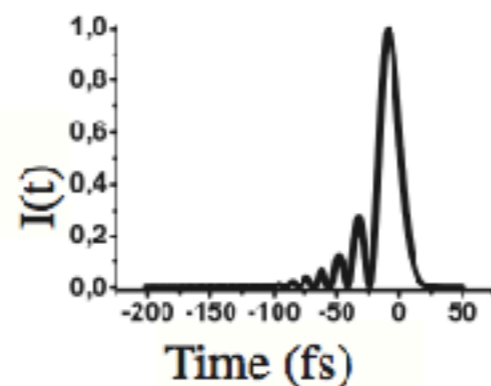
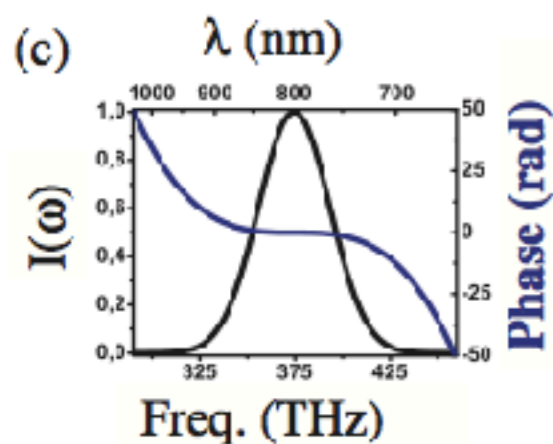
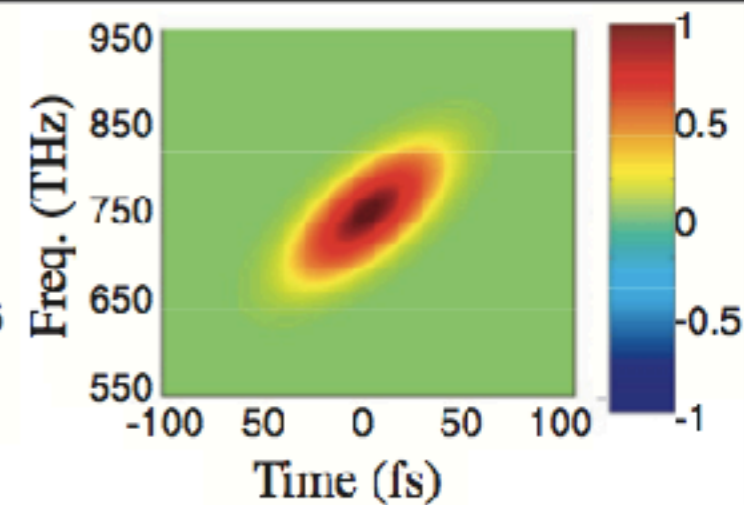
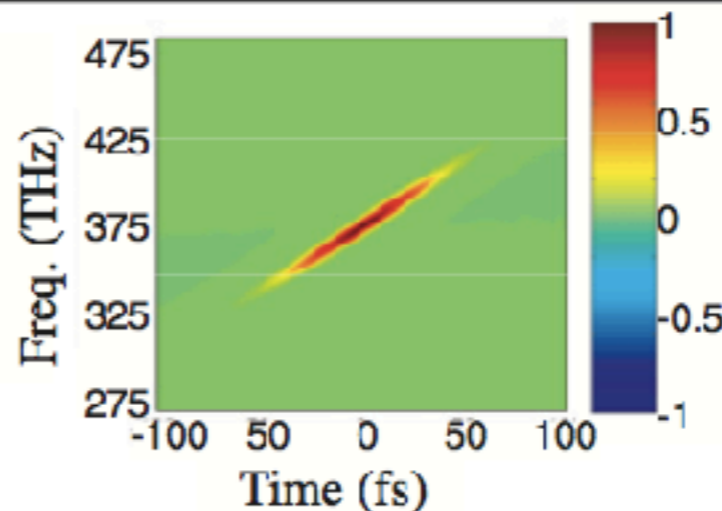
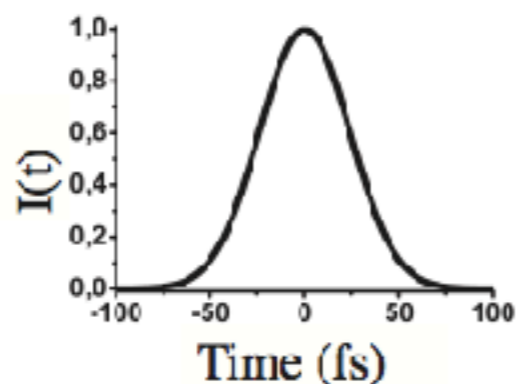
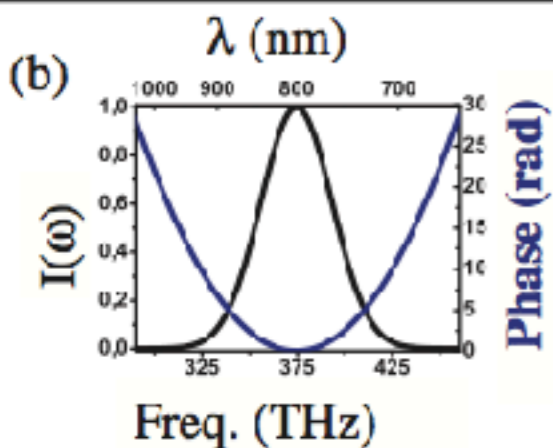
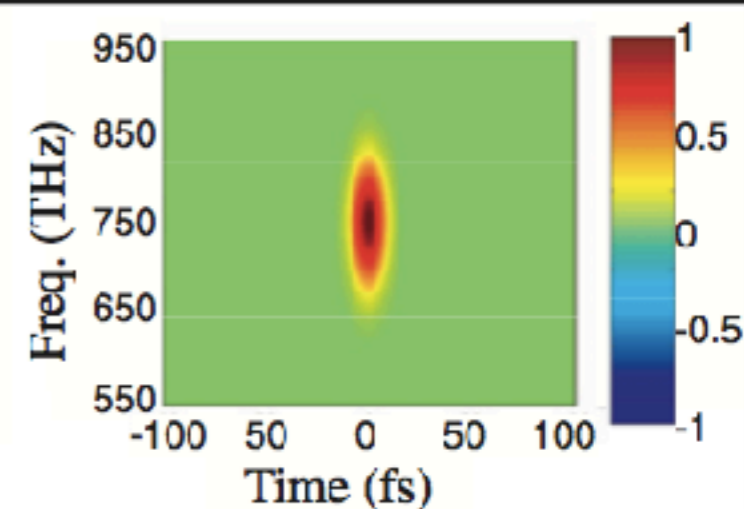
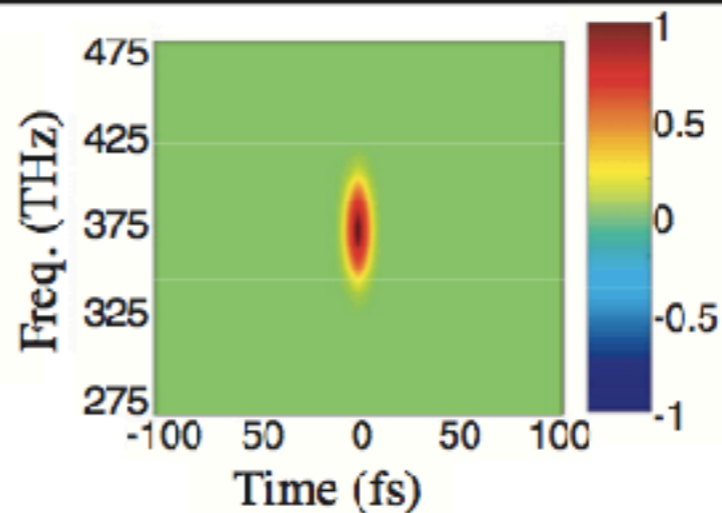
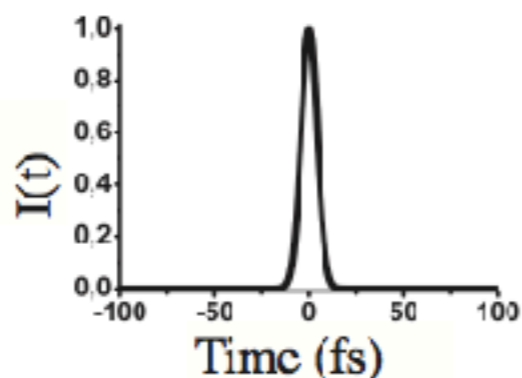
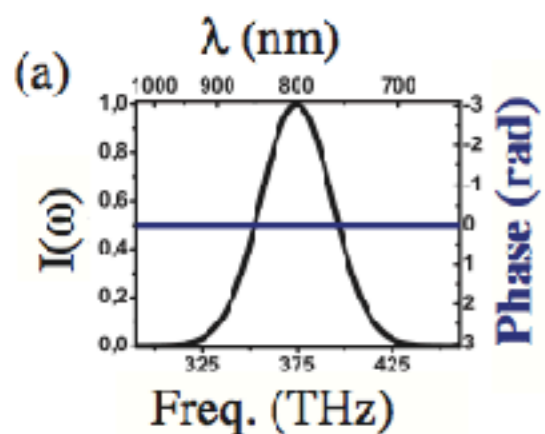
# Spectrogramme vs Wigner

Spectral intensity and phase

Temporal intensity

Wigner function

Spectrogram



## ***Partie III***

*L'impulsion  $E(x,y,z,t)$*

---

# Champ électromagnétique ultrabref

Equation de Maxwell dans le vide:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

Solution:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i\varphi_0} \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

*l'onde plane monochromatique*

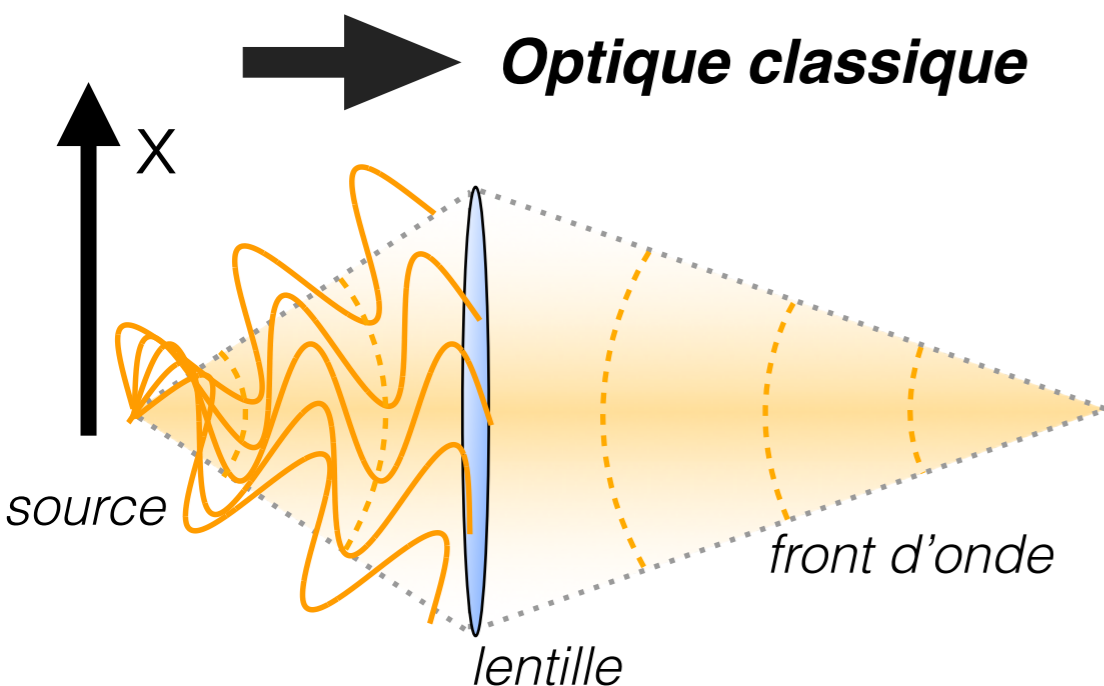
OU

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) e^{i\varphi_0(\mathbf{k})} \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} d\mathbf{k}$$

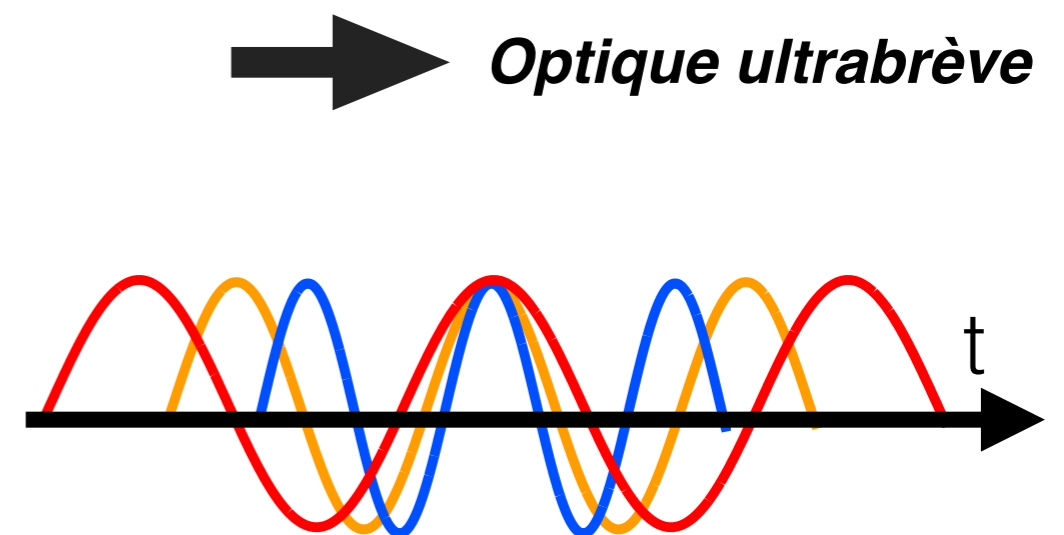
*une combinaison linéaire d'ondes planes monochromatiques*

## 2 cas particuliers :

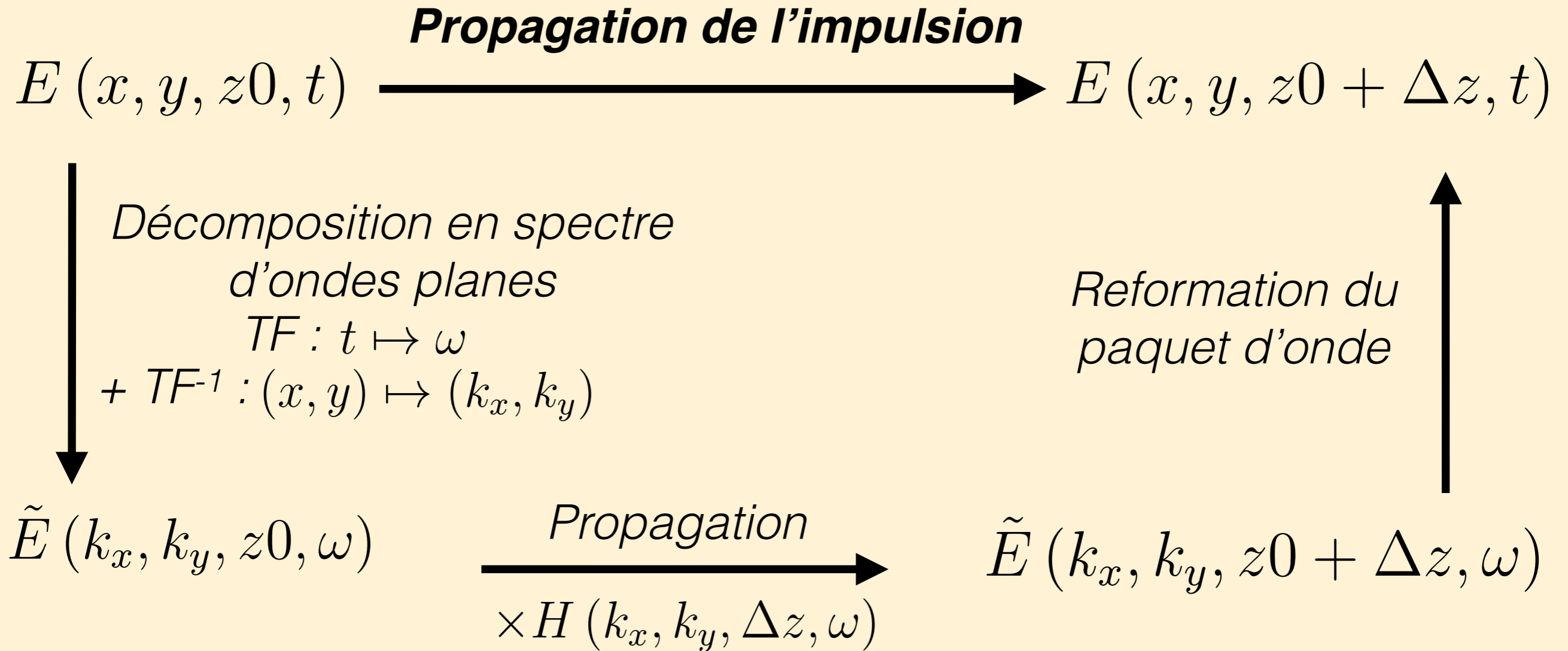
- Evolution spatiale d'un faisceau monochromatique (infini dans le temps)



- Evolution temporelle d'un faisceau polychromatique (fini dans le temps)



# Propagation d'une impulsion en espace libre



*Propagateur de l'espace libre:*

$$H(k_x, k_y, \Delta z, \omega) = \exp\left(i\Delta z \sqrt{\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2}\right)$$

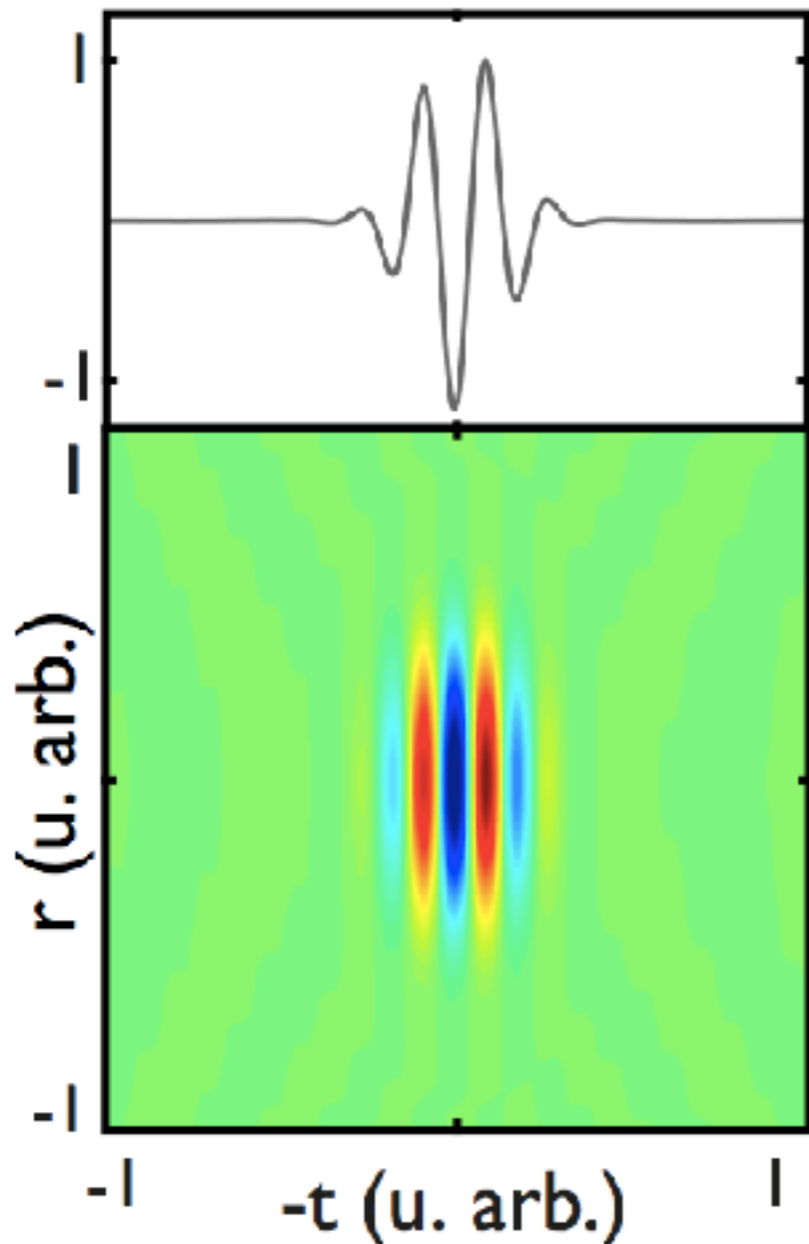
**Conclusion : z ne compte pas**

# Couplage spatio-temporel

## Découplage spatio-temporel

$$E(x, y, t) = f(x, y) \cdot g(t)$$

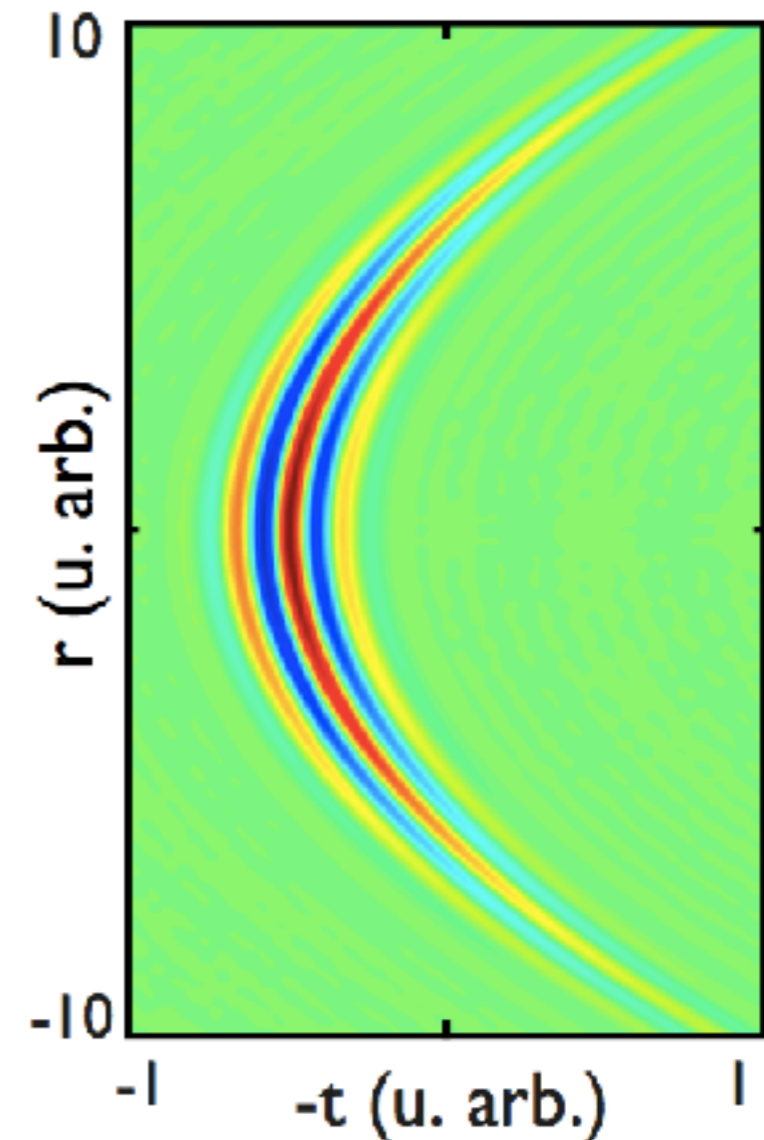
approximation implicite dans FROG, SPIDER...



## Couplage spatio-temporel

$$E(x, y, t) \neq f(x, y) \cdot g(t)$$

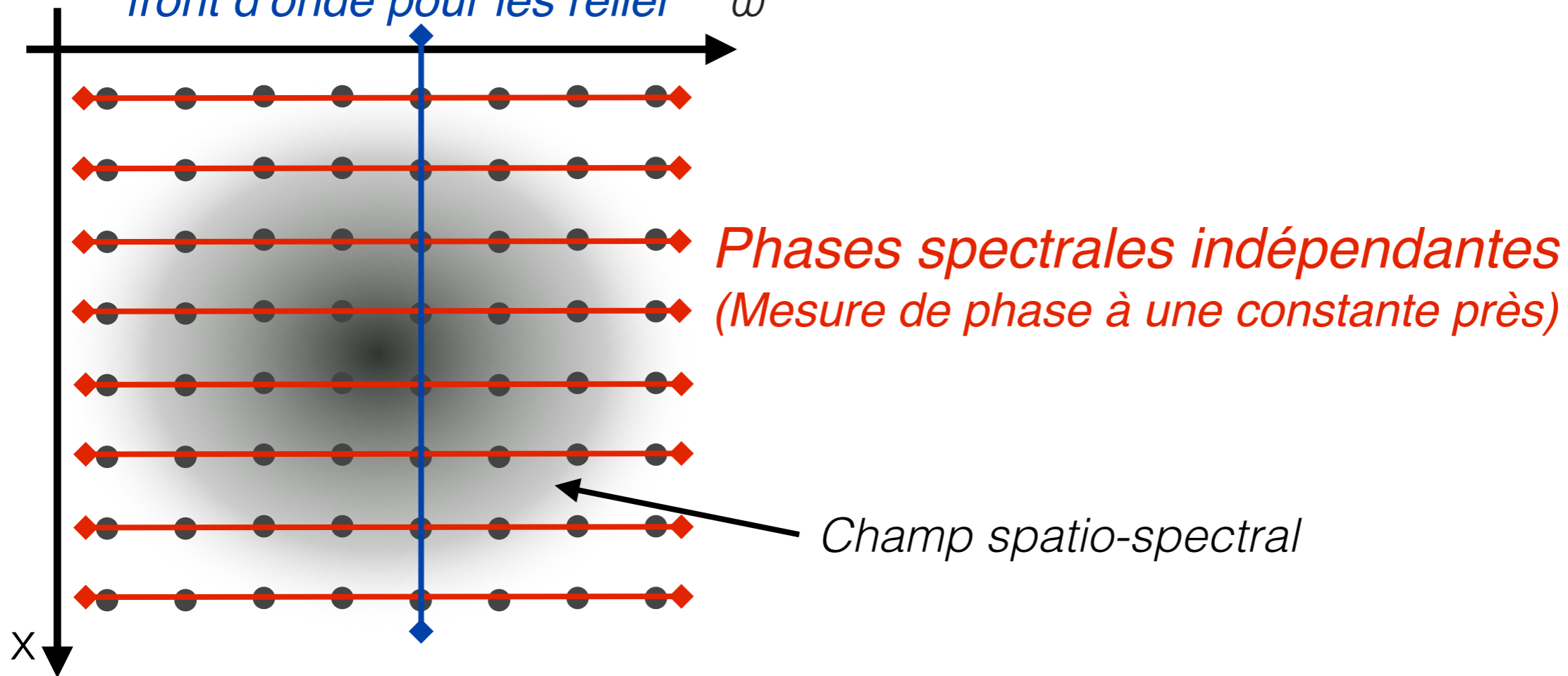
Exemples: chirp spatial, défocalisation, aberrations...



# Plusieurs stratégies possibles

## Phase spectrale résolue spatialement

Au moins une mesure de front d'onde pour les relier  $\omega$



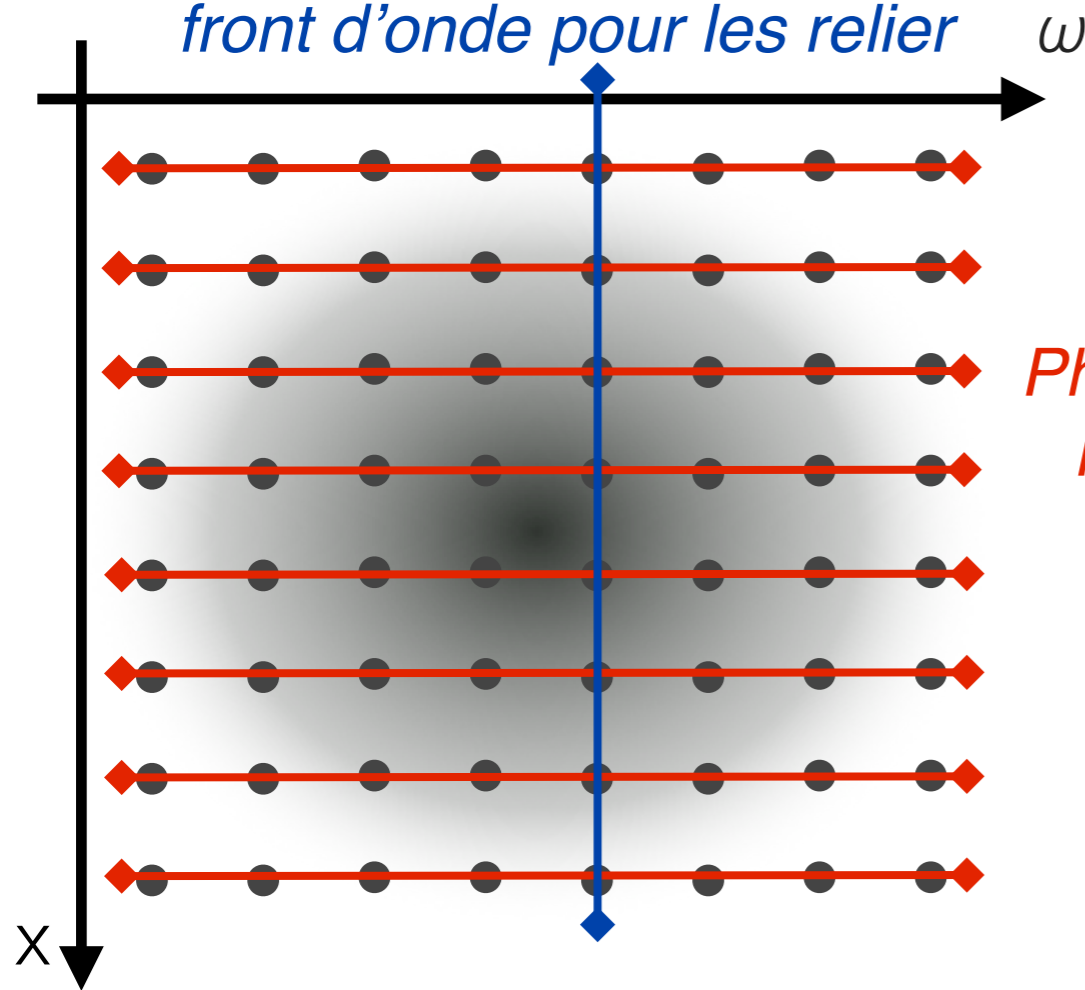
utilisée dans SEA SPIDER



# Plusieurs stratégies possibles

*Phase spectrale résolue spatialement*

*Au moins une mesure de front d'onde pour les relier*

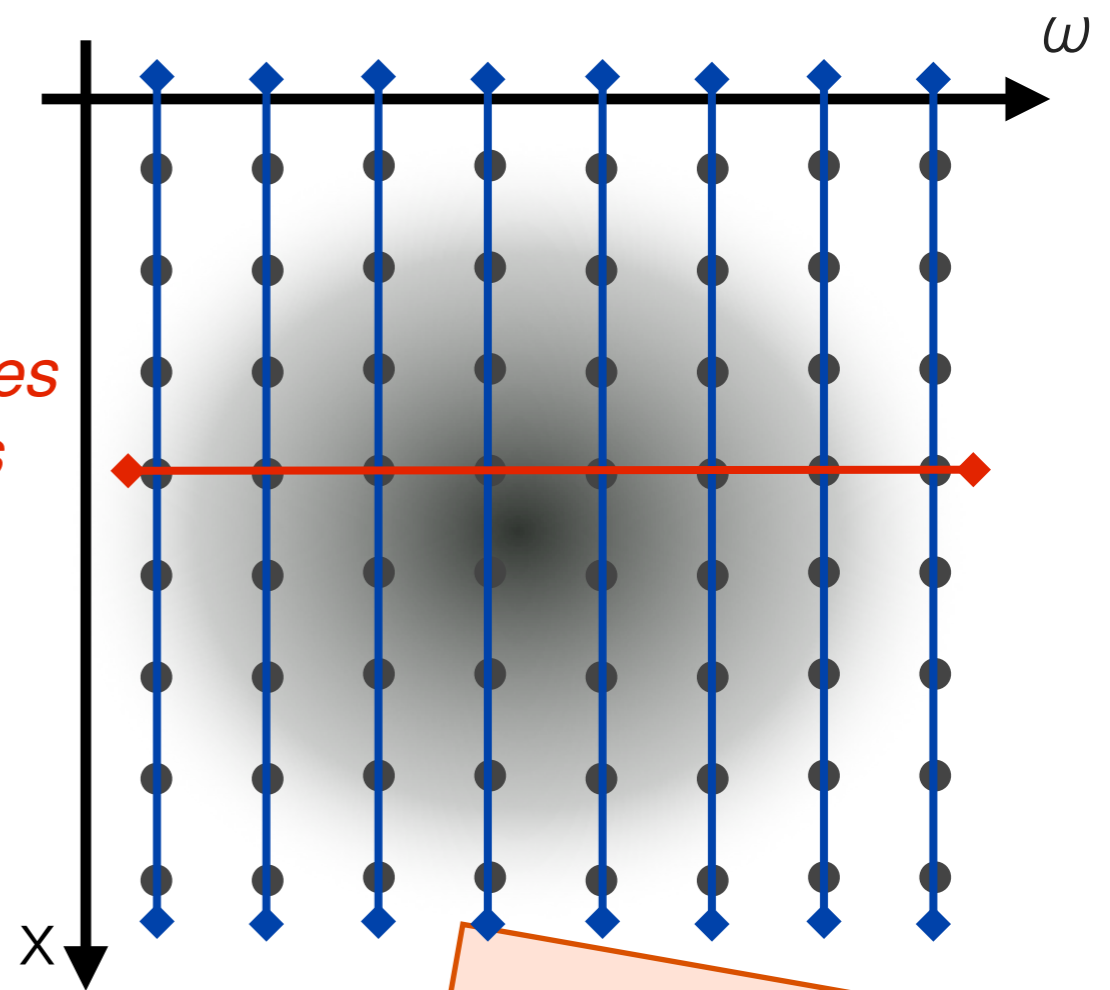


*Phases spectrales indépendantes*

utilisée dans **SEA SPIDER**

*Attention aux trous !  
(Zones où l'intensité = 0)*

*Front d'onde résolu spectralement*



utilisée dans **TERMITES, SEA TADPOLE**

## ***Partie IV***

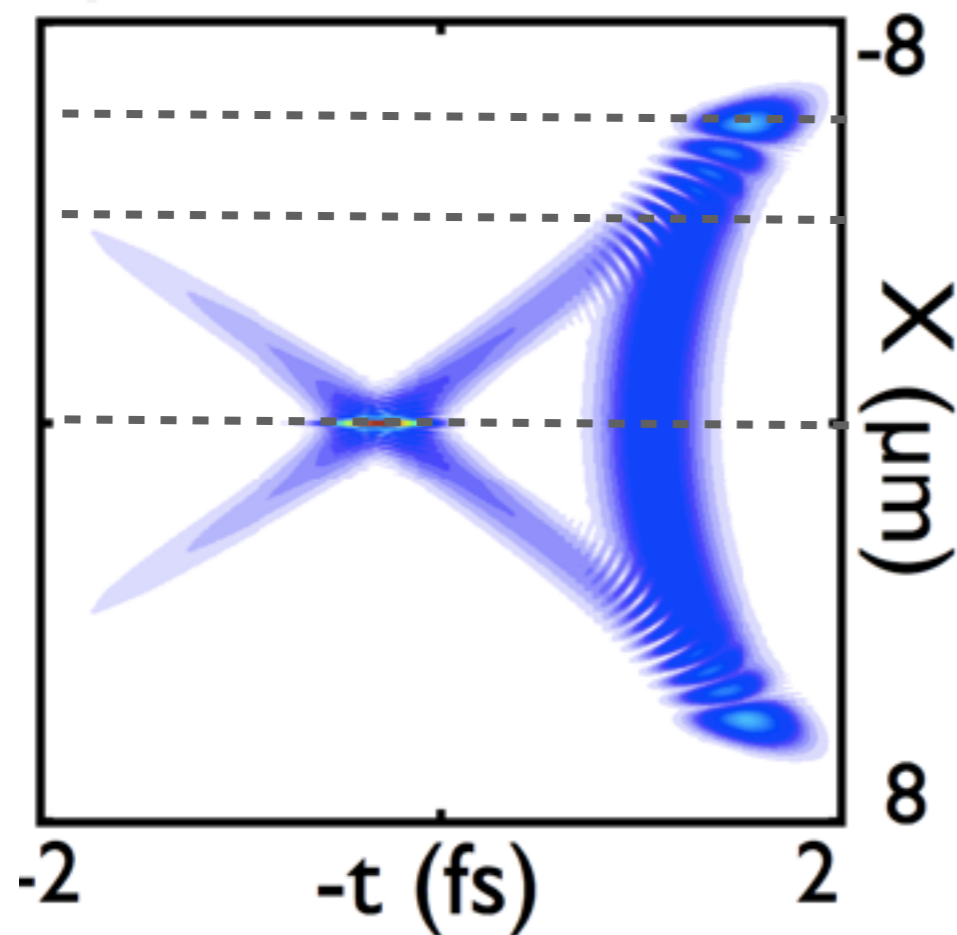
### *Ensembles statistiques d'impulsions*

---

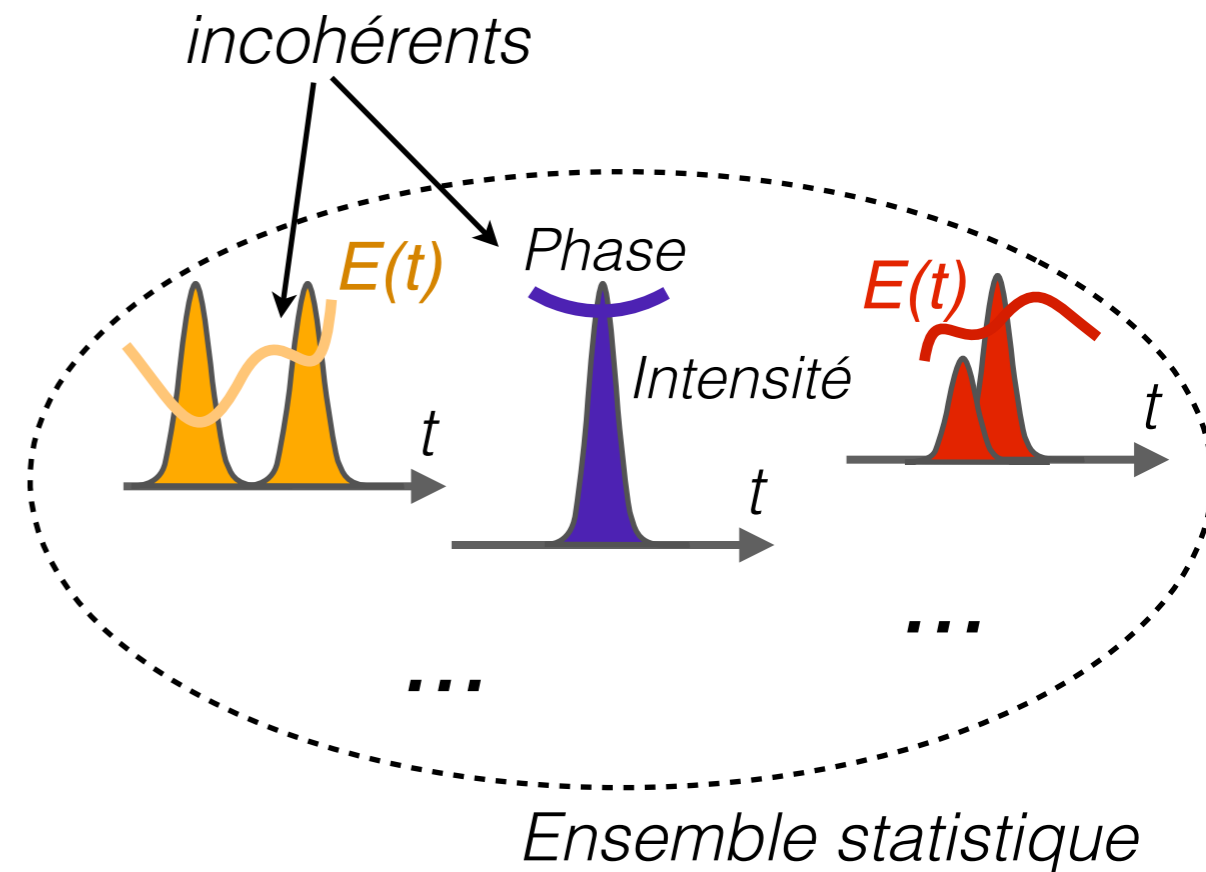
# Notion d'ensemble statistique d'impulsions

Mesure d'une impulsion avec couplages spatio-temporels par une technique qui reconstruit  $E(t)$  (type FROG, SPIDER)?

Le processus de mesure fait intervenir la somme des modules carrés de ces champs, ils sont mutuellement



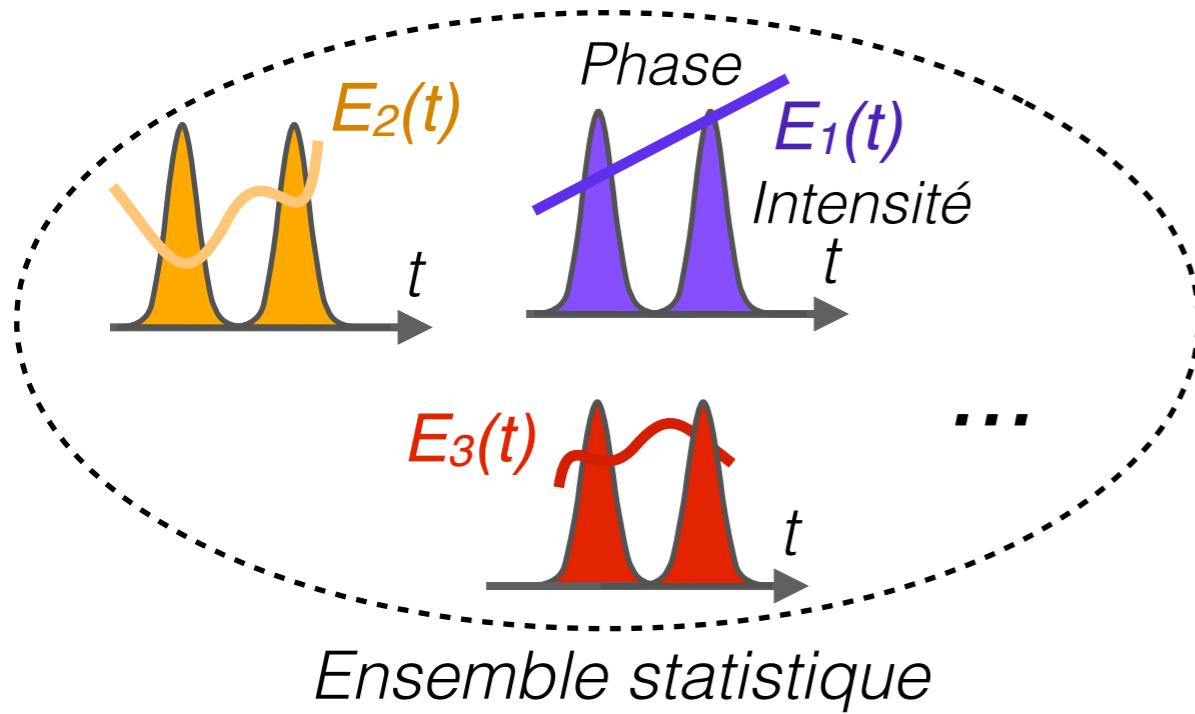
Focalisation d'une impulsion attoseconde en présence d'aberration sphérique (foyer marginal)



**Quel credit accorder à l'impulsion  $E(t)$  reconstruite ?**  
**L'artéfact cohérent**

Ratner et al, Opt. Lett., 37, 2874 (2012)

# Quantités représentant les ensembles statistiques



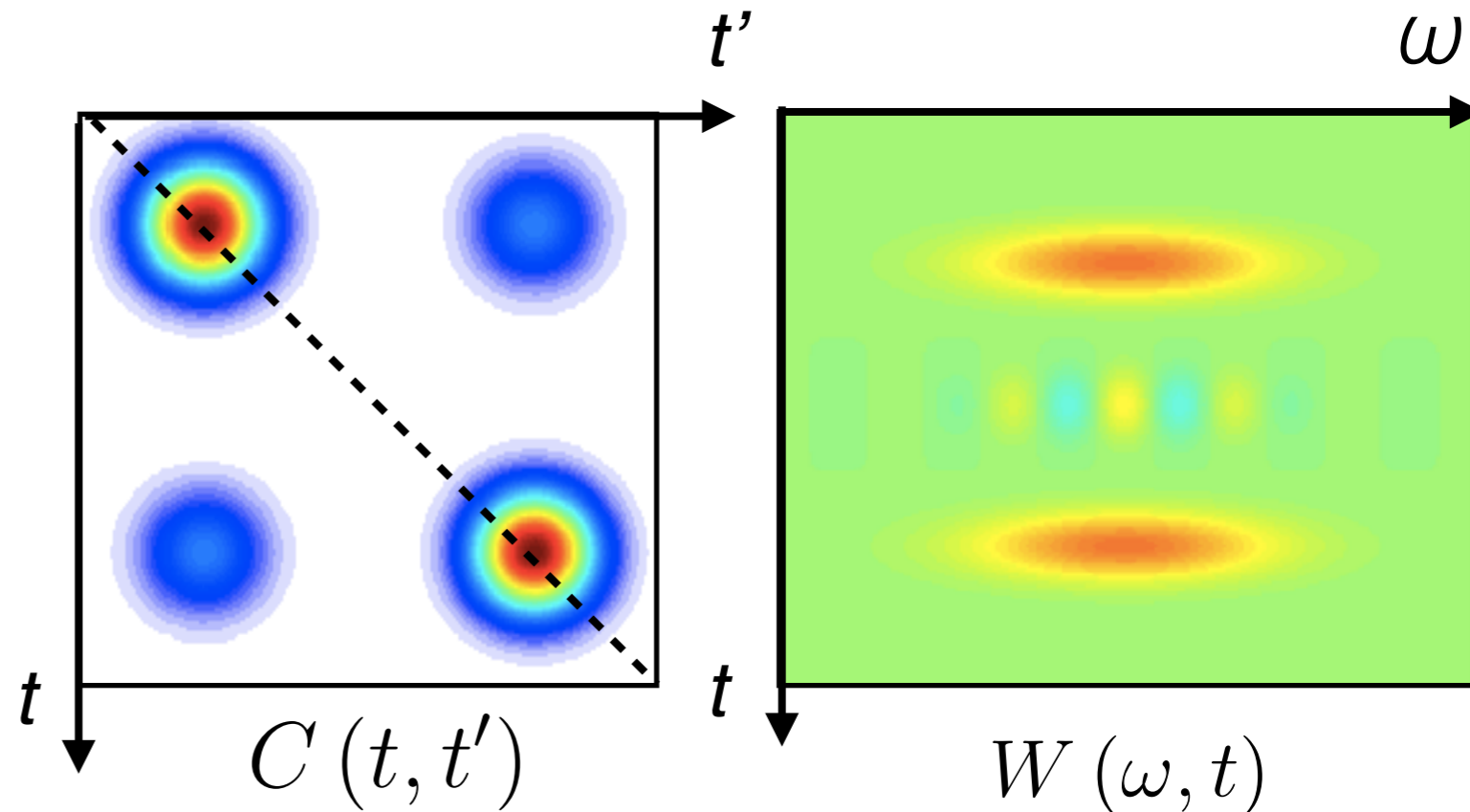
**Fonction de corrélation:**

$$C(t, t') = \langle E(t) E^*(t') \rangle$$

$$\propto E_1(t) E_1^*(t') + E_2(t) E_2^*(t') + E_3(t) E_3^*(t') + \dots$$

**Distribution de Wigner :**

$$W(\omega, t) = \int C(t + t'/2, t - t'/2) e^{i\omega t'} dt'$$



utilisée dans la tomographie  
chronocyclique, et Mixed-FROG

Nouvelles grandeurs à même de décrire  
la complexité de l'ensemble statistique

# Conclusion

## **Partie I L'impulsion $E(t)$**

- *domaine temporel et spectral*
- *spectre donné = limite fondamentale à la durée d'impulsion*
- *toute nonlinéarité de la phase spectrale augmente la durée d'impulsion*

## **Partie II Représentations temps-fréquence**

- *Spectrogramme = spectre de chaque tranche temporelle de l'impulsion*
- *Distribution de Wigner = représentation d'un paquet d'onde dans l'espace  $(\omega, t)$*

## **Partie III L'impulsion $E(x, y, z, t)$**

- *Couplage spatio-temporel quand  $E(x, y, t) \neq f(x, y) \times g(t)$*
- *Problème de la mesure de phase spatio-spectrale*

## **Partie IV Ensembles statistiques d'impulsions**

- *Nécessaire quand l'influence de différentes impulsions se superpose de manière incohérente lors de la mesure*
- *Représentations adaptées : fonction de corrélation et distribution de Wigner*



***Merci***